Учитывая (6), решение задачи (1) в случае $\varkappa = 0$ имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{X[\omega(z)]}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)]\,\omega'(\tau)\,d\tau}{X[\omega(\tau)][\omega(\tau) - \omega(z)]},$$

$\omega(z)$ — решение задачи (4).

Если $\varkappa > 0$,

$$\Phi(z) = \frac{X[\omega(z)]}{2\pi i} \left[\int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)]\,\omega'(\tau)\,d\tau}{X[\omega(\tau)][\omega(\tau) - \omega(z)]} + P_\varkappa[\omega(z)] \right],$$

$P_\varkappa$ — полином порядка $\varkappa$.

В случае $\varkappa < 0$ решение задачи (1) имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{X[\omega(z)]}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)]\,\omega'(\tau)\,d\tau}{X[\omega(\tau)][\omega(\tau) - \omega(z)]}.$$

Так как $X(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка $|\varkappa|$, то, чтобы существовало решение задачи (1), необходимы и достаточны следующие условия:

$$\int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)]}{X[\omega(\tau)]} [\omega(\tau)]^k \omega'(\tau)d\tau = 0, \; k = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1.$$

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
2. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев, 1973.

Поступила в редакцию 29.01.91.

УДК 517.925

А. В. ЧИЧУРИН

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ У ЧАСТНЫХ КЛАССОВ НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

В работах [1, 2] для дифференциальных систем вида:

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \; (i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где P_i и Q_i принадлежат пространству комплексных голоморфных функций на области $D^{n+1} \subset C^{n+1}$, $n \in N$ и являются полиномами по x_1, $x_2, \ldots, x_n$, были получены достаточные условия существования и указан вид решений, обладающих бесконечными предельными свойствами в окрестности некоторой конечной точки z_0. Ранее в работах [3, 4] были получены условия существования и указан вид решений с заданными предельными свойствами для систем трех уравнений вида (1) $(n = 3)$.

В данной статье ставится следующая задача: для некоторых частных классов систем вида

$$\frac{dx_i}{dz} = f(z)\,\frac{P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \; (i = \overline{1, n}), \tag{2}$$

где P_i и Q_i такие же, как и для системы (1), $f(z)$ — интегрируемая комплекснозначная функция, указать явный вид решений, обладающих заданными предельными свойствами.

Обозначим: $\overline{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{V} \equiv (V_2, V_3, \ldots, V_n)$,

$$\overline{\beta} \equiv (\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma), \; \overline{0} \equiv (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-\sigma}), \; \sigma \in Z, \; 2 \leqslant \sigma \leqslant n.$$

Полиномы $P_i(\bar{x})$, $Q_i(\bar{x})$ $(i=\overline{1,\ n})$ всегда можно представить в виде:

$$P_i(\bar{x})=\sum_{\tau=0}^{p^{(i)}} P_\tau^{(i)}(\bar{x}),\ Q_i(\bar{x})=\sum_{\tau=0}^{q^{(i)}} Q_\tau^{(i)}(\bar{x}),$$

где $P_\tau^{(i)}(\bar{x})$, $Q_\tau^{(i)}(\bar{x})$ $(i=\overline{1,\ n})$ — однородные полиномы по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степени τ; $p^{(i)}$, $q^{(i)}$ $(i=\overline{1,\ n})$ — целые неотрицательные числа.

Заметим, что одновременно все коэффициенты многочленов $P_{p^{(i)}}^{(i)}(\bar{x})$, $Q_{q^{(i)}}^{(i)}(\bar{x})$ не должны быть тождественными нулями.

Метод исследования аналогичен методу работ [1, 2]. С помощью замены

$$x_1=\frac{1}{U},\ x_j=\frac{V_j}{U}\ (j=\overline{2,\ n}) \tag{3}$$

получим систему (обозначим ее: система (1)), голоморфную в окрестности точки $(z=z_0,\ U=0,\ V_2=\beta_2,\ \ldots,\ V_\sigma=\beta_\sigma,\ V_{\sigma+1}=0,\ \ldots,\ V_n=0)$, если выполнены неравенства

$$P_{p^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})\prod_{j=2}^{n} Q_{q^{(j)}}^{(j)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})\neq 0, \tag{4}$$

$$p^{(1)}-q^{(1)}\geqslant \max(2,\ p^{(j)}-q^{(j)}), \tag{5}$$

где β_ξ $(\xi=\overline{2,\ \sigma})$ определяются как ненулевые корни многочленов $S_j(\bar{V})=$ $=V_j P_{p^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{V})\,Q_{q^{(j)}}^{(j)}(1,\ \bar{V})-P_{p^{(j)}}^{(j)}(1,\ \bar{V})\,Q_{q^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{V})$, $(j=\overline{2,\ n})$. Обозначим через $(V_2=\beta_2,\ \ldots,\ V_n=\beta_n)$ решение системы уравнений $S_j(\bar{V})=0$ $(j=\overline{2,\ n})$.

Применим метод для случая, когда

$$p^{(1)}-q^{(1)}=p^{(2)}-q^{(2)}=\ldots=p^{(n)}-q^{(n)}\geqslant 2, \tag{6}$$

$$\prod_{\nu=1}^{\sigma}\beta_\nu\neq 0;\ \beta_{\sigma+1},\ \ldots,\ \beta_n \text{ равны нулю.} \tag{7}$$

Сделаем замену

$$V_j=\varphi_j+\beta_j\ (j=\overline{2,\ n}), \tag{8}$$

и, разложив правые части уравнений системы (1) в ряды Тейлора по степеням $U, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dU}=-\dfrac{Q_{q^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})}{P_{p^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})}U^{p^{(1)}-q^{(1)}-2}(1+\Phi(U,\ \bar{\varphi})), & (9)\\[2ex] U\dfrac{d\varphi_j}{dU}=a_{j2}\varphi_2+\ldots+a_{jn}\varphi_n+F_j(U,\ \bar{\varphi})\ (j=\overline{2,\ n}), & (10)\end{cases}$$

где $a_{j\mu}=\dfrac{\partial S_j}{\partial\varphi_\mu}(\bar{\beta},\ \bar{0})/P_{p^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})\,Q_{q^{(j)}}^{(j)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})$ $(j,\ \mu=\overline{2,\ n})$, а F_j — голоморфные функции от $U, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в окрестности точки $U=\varphi_2=\ldots=\varphi_n=0$, обращающиеся в нуль в этой точке вместе со своими частными производными по $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Через $\Phi(U,\ \bar{\varphi})$ обозначен n-кратный, сходящийся в окрестности точки $(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ степенной ряд, причем такой, что $\Phi(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0$.

Рассмотрим следующие коэффициентные условия:

$$P_{p^{(\eta)}}^{(\eta)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})=0,\ P_{p^{(\eta)}-1}^{(\eta)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})'_\mu=0, \tag{11}$$

$$Q_{q^{(1)}}^{(1)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})=0,\ Q_{q^{(1)}-1}^{(1)}(1,\ \bar{\beta},\ \bar{0})'_\mu=0, \tag{12}$$

$$Q^{(1)}_{q^{(1)}}(1,\overline{\beta},\overline{0})=0,\ P^{(\eta)}_{p^{(\eta)}}(1,\overline{\beta},\overline{0})'_{\mu}=0, \tag{13}$$

$$Q^{(1)}_{q^{(1)}}(1,\overline{\beta},\overline{0})=0,\ P^{(\eta)}_{p^{(\eta)}-1}(1,\overline{\beta},\overline{0})'_{\mu}=0, \tag{14}$$

где $\mu=\overline{2,\ n}$; $\eta=\overline{\sigma+1,\ n}$,

$$P^{(i)}_{p^{(i)}-1}(1,\overline{\beta},\overline{0})'_{\lambda}=\sum_{\tilde{\tau}_1,\ldots,\tilde{\tau}_{\sigma}=0}^{p_{i1},\ldots,p_{i\sigma}} P^{(i)}_{\tilde{\tau}_1,\ldots,\tilde{\tau}_{\sigma}}\prod_{\substack{k=2\\(k\neq\lambda)}}^{\sigma}\beta_k^{\tilde{\tau}_k}\tau_{\lambda}\beta_{\lambda}^{\tilde{\tau}_{\lambda}-1}, \tag{15}$$

$(\lambda=\overline{2,\ \sigma})$ и $\tilde{\tau}_1,\ldots,\tilde{\tau}_{\sigma}$ — множество всех наборов индексов $\tau_1,\ldots,\tau_{\sigma}$ таких, что $\tau_1+\ldots+\tau_{\sigma}=p^{(i)}$;

$$P^{(i)}_{p^{(i)}-1}(1,\overline{\beta},\overline{0})'_{r}=\sum_{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_{\sigma}=0}^{p_{i1},\ldots,p_{in}} P^{(i)}_{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_{\sigma},0\ldots0,1,\underbrace{0\ldots0}_{n-r}}\prod_{k=2}^{\sigma}\beta_k^{\hat{\tau}_k}, \tag{16}$$

$(r=\overline{\sigma+1,\ n})$ и $\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_{\sigma}$ — множество всех наборов индексов $\tau_1,\ldots,\tau_{\sigma}$ таких, что $\tau_1+\ldots+\tau_{\sigma}=p^{(i)}-1$. $Q^{(i)}_{q^{(i)}-1}(1,\overline{\beta},\overline{0})'_{\lambda}$, $Q^{(i)}_{q^{(i)}-1}(1,\overline{\beta},\overline{0})'_{r}$ $(i=\overline{1,\ n})$ имеют вид, аналогичный (15), (16).

При выполнении любого из условий (11)—(14) характеристический многочлен $\Delta(s)$ системы Брио и Буке (10) примет вид:

$$(1-\lambda)^{n-\sigma}\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2\sigma}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots & a_{3\sigma}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{\sigma2} & a_{\sigma3} & \ldots & a_{\sigma\sigma}-\lambda\end{vmatrix}. \tag{17}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Delta(s)=0. \tag{18}$$

Воспользуемся результатами работ [5, 6]. Предположим, что (17) содержит: только простые элементарные делители

$$(s-a_1),\ (s-a_2),\ \ldots,\ (s-a_n); \tag{19}$$

непростые элементарные делители

$$(s-a_r)^{e_{1r}},\ (s-a_r)^{e_{2r}},\ \ldots\ (r=\overline{1,\ \xi};\ \xi<n). \tag{20}$$

Допустим, что

$$\operatorname{Re}a_{\varkappa}>0\ (\varkappa=\overline{1,\ m}),\ \operatorname{Re}\,a_{v}\leqslant0\ (v=\overline{m+1,\ n}). \tag{21}$$

При этом возможны следующие ситуации:

а) между $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не существует соотношений вида

$$a_{\varkappa}=\rho_{\varkappa}+\rho_{\psi}a_{\psi}+\ldots\ (\psi,\ \varkappa=\overline{1,\ m};\ \psi\neq\varkappa) \tag{22}$$

с целыми неотрицательными коэффициентами (среди которых имеется хотя бы одно натуральное число); (условие (23)), б) существует хотя бы одно соотношение вида (22). Тогда величинам $a_{\varkappa}$ $(\varkappa=\overline{1,\ m})$ поставим в соответствие целые неотрицательные числа $V_{\varkappa}$ (называемые «весом») так, чтобы $V_{\varkappa}=0$, если $a_{\varkappa}$ не встречается в левой части соотношения (22); в противном случае для каждого возможного соотношения (22) образуем числа $\rho_{\varkappa1}(V_1+e_1-1)+\ldots+\rho_{\varkappa\varkappa-1}(V_{\varkappa-1}+e_{\varkappa-1}-1)$, для $a_{\varkappa}$ (удобно рассматривать $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в возрастающем порядке, т. е. $\operatorname{Re}a_1<\operatorname{Re}a_2<\ldots<\operatorname{Re}a_m$), и $V_{\varkappa}$ примет значение на единицу большее наибольшего из этих чисел (условие (24)). Проделаем процедуру, аналогичную рассмотренной в работах [1, 2]. Запишем функции V_{η} в виде $V_{\eta}=\tau\tilde{V}_{\eta}(\eta=\overline{\sigma+1,\ n})$. В зависимости от коэффициентных условий рядов V_{η} возможны два случая:

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ (z-z_0)}} \tilde{V}_\eta = \infty, \text{ или} \tag{25}$$

$$\tilde{V}_\eta = x_{\eta 0} \text{ при } \tau = 0 \ (z = z_0). \tag{26}$$

Обозначим коэффициентное условие, при котором имеет место (25), как условие (А), а условие, когда имеет место (26),—(В). Тогда имеет место

Теорема 1. Пусть задана дифференциальная система (2). Если для системы (1) выполнены условия (4), (6), (7), а для системы (10) — хотя бы одно из условий (11)—(14) и выполнены:

1) условия (19) и (23):

а) условие (А), то решением системы (2) является система рядов

$$x_l = \tau^{-1}(\beta_l + N_l) \ (l = \overline{1, \sigma}), \ x_\eta = \tilde{N}_\eta \ (\eta = \overline{\sigma + 1, n}), \text{ где} \tag{27}$$

$$N_l = N_l(\tau, \ M_2\tau^{a_2}, \ \ldots, \ M_m\tau^{a_m}, \ [M_{m+1,1} + h_{m+1,1}V_{m+1}\ln\tau]\tau, \ \ldots,$$
$$[M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma}(V_{m+1} + n - \sigma - 1)\ln\tau]\tau) \tag{28}$$

— $[n - \sigma + m]$ — кратные степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$, $M_\nu(\nu = \overline{2, n})$, $M_{m+1,1}, \ldots, M_{m+1,n-\sigma}$ — постоянные, обладающая свойством

$$x_i(z) \to \infty \ (i = \overline{1, n}) \text{ при } z \to z_0, \tag{29}$$

б) условие (В), то решением является система рядов вида

$$x_l = \tau^{-1}(\beta_l + N_l) \ (l = \overline{1, \sigma}), \ x_\eta = x_{\eta 0} + \tilde{N}_\eta \ (\eta = \overline{\sigma + 1, n}), \tag{30}$$

где N_i $(i = \overline{1, n})$ определяются из (28), обладающая свойством

$$x_l(z) \to \infty, \ (l = \overline{1, \sigma}), \ x_\eta(z) \to x_{\eta 0} \ (\eta = \overline{\sigma + 1, n}) \text{ при } z \to z_0, \tag{31}$$

2) условия (19) и (24):

а) условие (А), то решением является система рядов вида (27), где

$$N_i = N_i(\tau, \ [M_2 + h_2\ln\tau]\tau^{a_2}, \ \ldots, \ [M_m + h_m\ln\tau]\tau^{a_m}, \ [M_{m+1,1} +$$
$$+ h_{m+1,1}V_{m+1}\ln\tau]\tau, \ \ldots, \ [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma}(V_{m+1} + n - \sigma - 1)\ln\tau]\tau) \tag{32}$$

$(i = \overline{1, n})$—ведут себя так же, как и ряды (28), $h_\nu(\nu = \overline{2, m})$, $h_{m+1,1}, \ldots, \ldots, h_{m+1,n-\sigma}$ — постоянные, обладающая свойством (29);

б) условие (В), то решением является система рядов вида (30), где N_i $(i = \overline{1, n})$ определяются из (32), обладающая свойством (31);

3) условия (20) и (23):

а) условие (А), то решением является система рядов вида (27), где

$$N_i = N_i(\tau, \ M_{21}\tau^{a_2}, \ \ldots, \ [M_{me_m} + h_{me_m}(e_m - 1)\ln\tau]\tau^{a_m}, \ [M_{m+1,1} +$$
$$+ h_{m+1,1}V_{m+1}\ln\tau]\tau, \ \ldots, \ [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma}(V_{m+1} + n - \sigma - 1)\ln\tau]\tau) \tag{33}$$

$(i = \overline{1, n})$ — $[e_2 + \ldots + e_m + 1]$ — кратные степенные ряды сходящиеся в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$, $M_{\nu\xi}$, $h_{\nu\xi}$ — постоянные, числа e_ν определяются из условия (20) $(\nu = \overline{2, m + 1}, \ \xi = \overline{1, e_\nu}, \ e_{m+1} = n - \sigma)$, обладающая свойством (29);

б) условие (В), то решением является система рядов вида (30), где N_i $(i = \overline{1, n})$ определяются из (33), обладающая свойством (31);

4) условия (20) и (24):

а) условие (А), то решением является система рядов вида (27), где

$$N_i = N_i(\tau, \ [M_{21} + h_{21}V_2\ln\tau]\tau^{a_2}, \ \ldots, \ [M_{me_m} + h_{me_m}(V_m + e_m - 1)\ln\tau]\tau^{a_m}$$
$$[M_{m+1,1} + h_{m+1,1}V_{m+1}\ln\tau]\tau, \ \ldots, \ [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma} \times$$
$$\times (V_{m+1} + n - \sigma - 1)\ln\tau]\tau) \tag{34}$$

$(i = \overline{1, n})$, и ведут себя так же, как ряды (33), числа $V_\nu (\nu = \overline{2, m})$ определяются из условия (24), обладающая свойством (29);

б) условие (В), то решением является система рядов вида (30), где N_i $(i = \overline{1, n})$ определяются из (34), обладающая свойством (31);

$\tilde{N}_\eta (\eta = \overline{\sigma + 1, n})$ в каждом из случаев 2, 3, 4 (подслучай а)) зависят от тех же переменных, что и соответствующие $N_i (i = \overline{1, n})$ и удовлетворяют условию (25), $\beta_1 \equiv 1$, τ всюду определяется по формуле

$$\tau = \left[(q^{(1)} - p^{(1)} + 1) \frac{P^{(1)}_{p^{(1)}} (1, \bar{\beta}, \bar{0})}{Q^{(1)}_{q^{(1)}} (1, \bar{\beta}, \bar{0})} \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz \right]^{(p^{(1)} - q^{(1)} - 1)^{-1}}. \tag{35}$$

Запишем еще одно условие:

$$Q^{(\xi)}_{q^{(\xi)}-1} (1, \bar{\beta}, \bar{0})'_\mu = 0, \ P^{(1)}_{p^{(1)}-1} (1, \bar{\beta}, \bar{0})'_\mu = 0 \ (\xi = \overline{2, \sigma};\ \mu = \overline{2, n}). \tag{36}$$

При выполнении хотя бы одной из пар условий ((36) и одно из условий (11)—(14)) $\Delta(s)$ системы (10) имеет вид $(1 - \lambda)^n$.

Теорема 2. Пусть задана дифференциальная система (2). Если для системы (1) выполнены условия (4), (6), (7), а для системы (10) — хотя бы одна пара условий ((36), (11))—((36), (14)), то решением системы (2) является система рядов вида: 1) (27) при выполненном условии (А); 2) (29) при выполненном условии (В), где $N_i = N_i(\tau, [M_2 + h_2 \ln \tau]\tau, \ldots$ $\ldots, [M_n + h_n \ln \tau]\tau)$ $(i = \overline{1, n})$ — n-кратные степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$, M_j, h_j $(j = \overline{2, n})$ — постоянные; τ определяется по формуле (35); $\tilde{N}_\eta$ $(\eta = \overline{\sigma + 1, n})$ зависят от тех же переменных, что и N_i $(i = \overline{1, n})$, и удовлетворяют условию (25).

Очевидно, что в первом случае решение будет обладать свойством (29), во втором — свойством (31).

Список литературы

1. Будько Т. С., Чичурин А. В. Существование полярных и псевдополярных решений автономных дифференциальных систем произвольного конечного порядка. Мн., 1989. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 11.12.89. № 7319-В89.
2. Будько Т. С., Яблонский А. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 1852.
3. Там же. 1985. Т. 21. № 11. С. 1849.
4. Там же. 1987. Т. 23. № 5. С. 754.
5. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., 1957.
6. Horn J. // Journ. fur M. 1896. V. 116. P. 265; 1897. V. 117. P. 104.

Поступила в редакцию 25.02.91.

УДК 519.852.67

В. Г. МЕДВЕДЕВ

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Численные решения на ЭВМ и ППЭВМ двух линейных полубесконечных экстремальных задач проводились с помощью метода опорных задач [1] и пакета ЛП АСУ [2].

I. Алгоритм решения. Целью эксперимента была проверка эффективности метода опорных задач [1] для решения полубесконечной задачи линейного программирования:

$$c'x \to \max, \ b_*(t) \leqslant A(t)\, x \leqslant b^*(t), \ t \in T; \ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{1}$$

Здесь c, x, d^* $d_* \in \mathbf{R}^n$; $b^*(.)$, $b^*(.) \in \mathbf{R}^m$; $A(.) \in \mathbf{R}^{m \times n}$; $T = \{t \mid a \leqslant t \leqslant b\}$; $b_*(.)$, $b^*(.)$, $A(.) \in C^p(T)$, $p \geqslant 2$ — целое число.