В заключение отметим возможность обобщения по аналогии с [5] изложенной методики получения численных решений задач с переменным начальным градиентом на случай неоднородной пористой среды.

Список литературы

1. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань, 1978.
2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., 1976.
3. Вндякин В. В., Ентов В. М., Таранчук В. Б. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 182.
4. Ортега Дж., Рейнтболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.
5. Видякин В. В., Таранчук В. Б. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 12. С. 1072.

Поступила в редакцию 11.11.90.

УДК 517.948.32:517.544

С. Л. ШТИН

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ПЯТИМЕРНОГО ВЕКТОРА

Рассмотрим векторную задачу сопряжения: найти кусочно-голоморфный вектор $F(z)=(F_1(z), \ldots, F_5(z))^t$ (здесь t означает транспонирование) с линией скачков $L = L_1 \cup L_2$, где $L_1 = [-1,0]$, $L_2 = [0, 1]$, ориентированной в направлении от начала координат, который ограничен в окрестности узлов $z = -1, 0, 1$ и имеет на бесконечности полюс порядка $\leqslant s$ при условии сопряжения $F^+(t) = G(t)F^-(t)$, где $G(t)$ — кусочно-постоянная матрица

$$G(t) = \begin{cases} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & t \in L_1, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in L_2. \end{cases}$$

Общая теория подобных задач приводится в [3]. В настоящей работе рассматривается задача частного вида с кусочно-подстановочной матрицей в качестве коэффициента Римана.

Необходимые для дальнейшего свойства таких матриц рассмотрены в [1]. Для матриц σ_1 и σ_2 существует такое преобразование подобия, которое разлагает их в прямую сумму мономиальных матриц порядков 1 и 4. Это преобразование осуществляется посредством матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^3 & \lambda & \lambda^4 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \lambda & \lambda^3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \exp(2\pi i/5).$$

Перейдем к новому неизвестному вектору $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \ldots, \Phi_5(z))^t$ с помощью линейной замены неизвестных $\Phi(z) = S^{-1}F(z)$.

Граничное условие запишется в виде:

$$\Phi^{+}(t)=S^{-1}F^{+}(t)=[S^{-1}G(t)S]S^{-1}F^{-}(t)=G_1(t)\Phi^{-}(t),$$

где $G_1(t)=S^{-1}G(t)S$.

Выполнив умножение матриц, получим:

$$G_1(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda^2&0&0\\0&0&0&\lambda^3&0\\0&0&0&0&\lambda^4\end{pmatrix}, & t\in L_1\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda^2\\0&\lambda^3&0&0&0\\0&0&0&\lambda^4&0\end{pmatrix}, & t\in L_2.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим риманову поверхность $W^4=z(1-z)^3$, состоящую из четырех сфер Римана с разрезом по отрезку L_2 и склеенных между собой согласно подстановке (2, 4, 5, 3), представляемой матрицей, заданной на L_2. На этой поверхности возникает скалярная задача сопряжения, эквивалентная данной векторной задаче: найти кусочно-голоморфную функцию $\Psi(z, W)$ на римановой поверхности, ограниченную в окрестности точек с проекциями $z=-1, 0, 1$, имеющую над точкой ∞ полюсы порядка $\leqslant s$ и удовлетворяющую граничным условиям:

$$\begin{matrix}\Psi_k^{+}(t)=\lambda^k\Psi_k^{-}(t)\\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{matrix}\quad \text{при } t\in(-1,\ 0),$$

$$\begin{cases}\Psi_1^{+}(t)=\lambda^3\Psi_3^{-}(t)\\ \Psi_2^{+}(t)=\lambda\Psi_1^{-}(t)\\ \Psi_3^{+}(t)=\lambda^4\Psi_4^{-}(t)\\ \Psi_4^{+}(t)=\lambda^2\Psi_2^{-}(t)\end{cases}\quad \text{при } t\in(0,\ 1).$$

Здесь через $\Psi_i(z)=\Phi_i(z)$ обозначены ограничения $\Psi(z, W)$ на i-м листе поверхности, $i=1, 2, 3, 4$. Нумерация листов поверхности выбирается так, что при $t\in(0, 1)$

$$(*)\qquad\begin{aligned}&W_1^{+}(t)=\sqrt[4]{t(1-t)^3}\in\mathrm{R}>0,\\ &W_2^{+}(t)=iW_1^{+}(t),\\ &W_3^{+}(t)=-iW_1^{+}(t),\\ &W_4^{+}(t)=-W_1^{+}(t).\end{aligned}$$

Риманова поверхность $W^4=z(1-z)^3$ допускает рациональную параметризацию

$$\begin{cases}z=\dfrac{\zeta^4}{\zeta^4+1}\\ W=\dfrac{\zeta}{\zeta^4+1}\end{cases},$$

с помощью которой эту поверхность можно конформно отобразить на плоскость ζ.

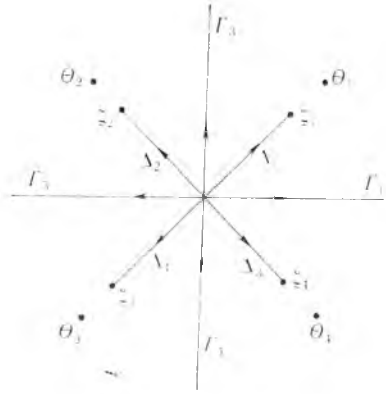
Найдем образ контура $L=L_1\cup L_2$ в плоскости ζ:

$$z=0\mapsto\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=0,$$

$$z=1\mapsto\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=\infty,$$

$$z=-1\mapsto\zeta_k=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\exp\left(\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi k}{2}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,,$$

$$z=\infty\mapsto\theta_k=\exp\left(\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi k}{2}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$



При такой параметризации задача сопряжения на римановой поверхности переходит в скалярную задачу сопряжения на плоскости ζ с контуром скачков $K = (\bigcup\limits_1^4 \Gamma_i) \bigcup (\bigcup\limits_1^4 \Delta_i)$, показанным на рисунке.

Точнее, требуется определить кусочно-голоморфную функцию $\chi(\zeta) = \Psi\left(\frac{\zeta^4}{1+\zeta^4}, \frac{\zeta}{1+\zeta^4}\right)$, ограниченную везде, кроме окрестностей точек Θ_k, где она имеет полюсы порядка s и удовлетворяет следующим условиям сопряжения:

$$\begin{cases} \chi^+(t) = \lambda^i \chi^-(t), & t \in \Delta_i, \ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ \chi^+(t) = \lambda^3 \chi^-(t), & t \in \Gamma_1, \\ \chi^+(t) = \lambda\, \chi^-(t), & t \in \Gamma_2, \\ \chi^+(t) = \lambda^4 \chi^-(t), & t \in \Gamma_3, \\ \chi^+(t) = \lambda^2 \chi^-(t), & t \in \Gamma_4. \end{cases}$$

Если ввести обозначение

$$H(t) = \begin{cases} \lambda^3, \ t \in \Gamma_1; & \lambda, \ t \in \Delta_1 \\ \lambda, \ t \in \Gamma_2; & \lambda^2, \ t \in \Delta_2 \\ \lambda^4, \ t \in \Gamma_3; & \lambda^3, \ t \in \Delta_3 \\ \lambda^2, \ t \in \Gamma_4; & \lambda^4, \ t \in \Delta_4, \end{cases}$$

где $\lambda = \exp(2\pi i/5)$, то общее решение последней задачи сопряжения записывается в виде [2]:

$$\chi(\zeta) = R(\zeta) \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\Delta_i} \frac{\ln H(t)}{t-\zeta}\, dt + \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\Gamma_i} \ln H(t) \left[\frac{1}{t-\zeta} - \frac{t^3}{t^4+1}\right] dt\right)\right],$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция, в которую входят в подходящих степенях m_k множители $(\zeta - c_k)^{m_k}$ для всех узлов $c_k \in K$ и которая, кроме того, имеет полюсы порядка s в точках Θ_k, $k = 1, \ldots, 4$ и ограничена на бесконечности [2]. В силу того, что мы требуем ограниченности в окрестности точек ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, множители $(\zeta - \zeta_i)$ войдут в $R(\zeta)$ в нулевой степени.

Для узла 0 имеем:

$$m_0 = -\frac{1}{2\pi i}\,[\lim_{t\to 0 \text{ по } \Gamma_1} \ln H(t) + \ldots + \lim_{t\to 0 \text{ по } \Gamma_4} \ln H(t) + \lim_{t\to 0 \text{ по } \Delta_1} \ln H(t) + \ldots + \lim_{t\to 0 \text{ по } \Delta_4} \ln H(t)] = -4.$$

Для узла ∞ получаем:

$$m_\infty = \frac{1}{2\pi i}\,[\lim_{t\to\infty \text{ по } \Gamma_1} \ln H(t) + \ldots + \lim_{t\to\infty \text{ по } \Gamma_4} \ln H(t)] = 2.$$

Таким образом, в $R(\zeta)$ входит сомножитель

$$\zeta^4 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{-2} \frac{1}{(\zeta^4+1)^s} = \frac{\zeta^6}{(\zeta^4+1)^s}.$$

Для того, чтобы функция $R(\zeta)$ была ограничена в окрестности ∞, она должна иметь вид:

$$R(\zeta) = \frac{P_{4s-6}(\zeta)\, \zeta^6}{(\zeta^4+1)^s},$$

где $P_{4s-6}(\zeta)$ — некоторый многочлен степени $4s - 6$, не имеющий корней в точках Θ_k (при $s=1$ $P_{4s-6}(\zeta)=1/(a\zeta^2+b\zeta+c)$). Возвращаясь на риманову поверхность $W^4=z(1-z)^3$ и учитывая, что $\zeta^4=\frac{z}{1-z}$, т. е. $\zeta=\sqrt[4]{\frac{z(1-z)^3}{(1-z)(1-z)^3}}=\frac{W}{1-z}$, получаем для общего решения формулу:

$$\Psi(z,\ W)=\frac{P_{4s-6}\left(\frac{W}{1-z}\right)\left(\frac{W}{1-z}\right)^6}{\left[\left(\frac{W}{1-z}\right)^4+1\right]^s}X\left(\frac{W}{1-z}\right),$$

где

$$X(\zeta)=\exp\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{i=1}^{4}\int_{\Delta_i}\frac{\ln H(t)}{t-\zeta}\,dt+\sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma_i}\ln H(t)\left(\frac{1}{t-\zeta}-\frac{t^3}{t^3+1}\right)dt\right].$$

Отсюда получаем решение векторной задачи $(\Phi_1(z),\ \dots,\ \Phi_5(z)^t)$:

$$\Phi_1(z)=Q_s(z),$$

$$\Phi_i(z)=\Psi_i(z)=\frac{P_{4s-6}\left(\frac{W_i}{1-z}\right)\left(\frac{W_i}{1-z}\right)^6}{\left[\left(\frac{W_i}{1-z}\right)^4+1\right]^s}X\left(\frac{W_i}{1-z}\right),\quad i=2,\ \dots,\ 5,$$

где $W_i(z)$ выбираются в соответствии с (*), а $Q_s(z)$ — произвольный многочлен степени s.

Окончательно получаем для компонент вектора $F(z)$ следующие выражения:

$$F_1(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)+\Phi_3(z)+\Phi_4(z)+\Phi_5(z),$$
$$F_2(z)=\Phi_1(z)+\lambda^4\Phi_2(z)+\lambda^3\Phi_3(z)+\lambda^2\Phi_4(z)+\lambda\Phi_5(z),$$
$$F_3(z)=\Phi_1(z)+\lambda^3\Phi_2(z)+\lambda\Phi_3(z)+\lambda^4\Phi_4(z)+\lambda^2\Phi_5(z),$$
$$F_4(z)=\Phi_1(z)+\lambda^2\Phi_2(z)+\lambda^4\Phi_3(z)+\lambda\Phi_4(z)+\lambda^3\Phi_5(z),$$
$$F_5(z)=\Phi_1(z)+\lambda\Phi_2(z)+\lambda^2\Phi_3(z)+\lambda^3\Phi_4(z)+\lambda^4\Phi_5(z),\quad \lambda=\exp(2\pi i/5).$$

Список литературы

1. Штин С. Л. Мономиальная разложимость разрешимых групп подстановок. Мн., 1990. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 08.01.90. № 956-В90.
2. Зверович Э. И. // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 1.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 24.12.90.

УДК 517.948.32:517:544

Т. А. ШЕВИЛА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ E_p

1. Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная контуром Ляпунова Γ. Предполагаем, что начало координат принадлежит области D. На контуре Γ заданы две функции $G(t)$ и $g(t)$, $G(t)$ — непрерывная функция, $g(t)\in L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти все функции $\Phi(z)$, принадлежащие пространству $E_p(D)$ и удовлетворяющие следующему краевому условию:

$$\Phi[\alpha(t)]=G(t)\Phi(t)+g(t) \qquad (1)$$

почти для всех $t\in\Gamma$.

Здесь $\alpha(t)$ переводит контур Γ на себя с изменением ориентации и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\alpha[\alpha(t)]\equiv t$; 2) $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.