

27. Успенский С. В. // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7. № 2. С. 409.
 28. Буренков В. И., Гольдман М. Л. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 31.
 29. Deny J., Lions J. L. // Ann. Inst. Fourier. 1953—54. V. 5. P. 305.
 30. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 24.
 31. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 10.12.91.

УДК 532.546

В. В. ВИДЯКИН, И. Р. ХАРРАЗОВА

К РЕШЕНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Рассматривается плоская задача стационарной фильтрации вязкопластической жидкости в однородном недеформируемом пористом пласте по следующему закону с начальным градиентом [1]:

$$\mathbf{u} = 0, \quad |\nabla p| < G; \quad \mathbf{u} = -(k/\mu)\nabla p, \quad |\nabla p| \geq G. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — скорость фильтрации; ∇p — градиент давления; k — коэффициент проницаемости; μ — вязкость; G — начальный градиент. Исследуемое течение обладает рядом качественных особенностей, в частности, в областях, где $|\nabla p| < G$, образуются застойные зоны. Предположим, что пласт вскрыт системой m нагнетательных и l добывающих скважин, расположенных таким образом, что существует только одна застойная зона, занимающая внешность некоторого замкнутого кусочно-гладкого контура $\partial\Omega$.

Расчет предельно-равновесной конфигурации границы застойной зоны сводится к следующей краевой задаче для отыскания давления p и формы контура $\partial\Omega$ [2]:

$$\Delta p = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\partial p / \partial n = 0, \quad |\partial p / \partial s| = G \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

$$\lim_{\gamma_i \rightarrow 0} \int_{\gamma_i} (k/\mu) (\partial p / \partial n_i) d\sigma = Q_i, \quad (4)$$

где n, s — внутренняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$; γ_i — контур, охватывающий i -ю скважину с дебитом Q_i , расположенную в точке (x_i, y_i) ($i = 1, m + l$); n_i — внутренняя нормаль к γ_i , x, y — декартовы координаты в плоскости течения. Заметим, что сформулированная краевая задача допускает другую физическую интерпретацию, соответствующую задаче об определении предельно-равновесных конфигураций целиков остаточной вязкопластической нефти, возникающих при вытеснении ее водой. Ее решение в точной постановке вызывает большие трудности и может быть получено только в частных случаях для специальных законов изменения начального градиента [1]. В настоящей работе приводится метод, позволяющий численно исследовать (2) — (4) для широкого класса зависимостей $G(x, y)$.

По аналогии с [3] распределение давления будем искать в виде суперпозиции потенциала внешнего поля $\varphi(x, y)$ и потенциала простого слоя с плотностью $\nu(\sigma)$, сосредоточенного на контуре $\partial\Omega$:

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \ln R^{-1} d\sigma,$$

где

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m+l} \frac{Q_i \mu}{4\pi k} \ln [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2], \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

σ — дуговая абсцисса точки $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$.

Граничные условия (3), (4) приводят к следующей системе нелинейных интегродифференциальных уравнений для отыскания плотности $v(\sigma)$ и формы контура $\partial\Omega$:

$$-\pi v(\vartheta) + \int_0^{2\pi} v(\alpha) N[g(\alpha), g(\vartheta)] L(\alpha) d\alpha + \Phi[g(\vartheta)] = 0, \quad (5)$$

$$\left| \int_0^{2\pi} v(\alpha) K[g(\alpha), g(\vartheta)] L(\alpha) d\alpha + \Psi[g(\alpha)] \right| = G[g(\vartheta), \vartheta] L(\vartheta), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} N[g(\alpha), g(\vartheta)] &= [g^2(\vartheta) - g(\vartheta)c_1(\alpha, \vartheta) - g'(\vartheta)c_2(\alpha, \vartheta)]\kappa^{-1}[g(\alpha), g(\vartheta)], \\ K[g(\alpha), g(\vartheta)] &= [g(\vartheta)g'(\vartheta) - g'(\vartheta)c_1(\alpha, \vartheta) + g(\vartheta)c_2(\alpha, \vartheta)]\kappa^{-1}[g(\alpha), g(\vartheta)], \\ c_1(\alpha, \vartheta) &= g(\alpha)\cos(\vartheta - \alpha), \quad c_2(\alpha, \vartheta) = g(\alpha)\sin(\vartheta - \alpha), \\ \kappa[g(\alpha), g(\vartheta)] &= g^2(\vartheta) - 2g(\vartheta)c_1(\alpha, \vartheta) + g^2(\alpha), \quad L^2(\vartheta) = [g^2(\vartheta) + g'^2(\vartheta)], \\ \Phi[g(\vartheta)] &= \frac{\mu}{2\pi k} \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \frac{g^2(\vartheta) - g(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) - g'(\vartheta)g_i \sin(\vartheta - \alpha_i)}{g^2(\vartheta) - 2g(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) + g_i^2}, \\ \Psi[g(\vartheta)] &= \frac{\mu}{2\pi k} \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \frac{g(\vartheta)g'(\vartheta) - g'(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) + g(\vartheta)g_i \sin(\vartheta - \alpha_i)}{g^2(\vartheta) - 2g(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) + g_i^2}, \\ x_i &= g_i \cos \alpha_i, \quad y_i = g_i \sin \alpha_i, \quad \partial\Omega = \{r = g(\vartheta) \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}, \end{aligned}$$

r, ϑ — полярные координаты в плоскости течения.

В качестве примера рассмотрим решение задачи о границе застойной зоны для течения, создаваемого источником и стоком равной интенсивности Q , расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга в безграничном пласте. Система (5), (6) решалась численно. Возникающие системы нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $g(\vartheta)$ и $v(\vartheta)$ в узлах разностной сетки рассчитывались обобщенным методом Стеффенсена [4]. На рис. 1 в безразмерных координатах $X = x/L, Y = y/L$ ($L^2 = Q\mu a/G_0\pi k$) изображены границы застойных зон

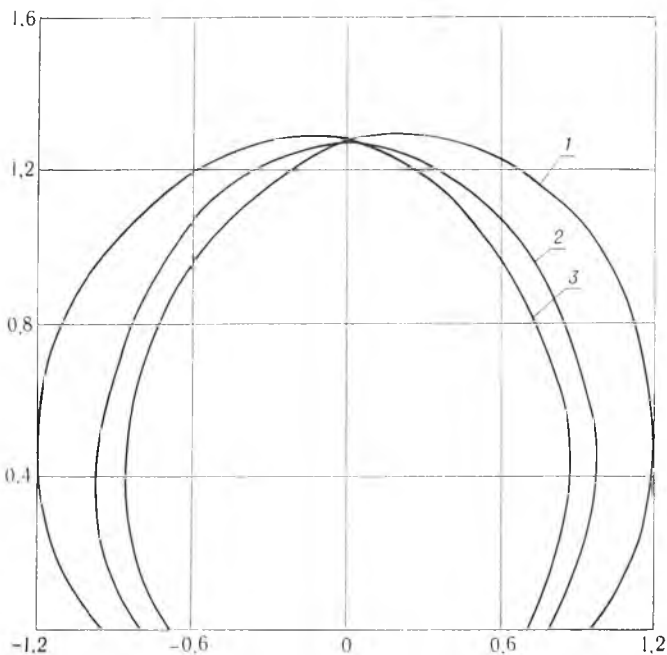


Рис. 1

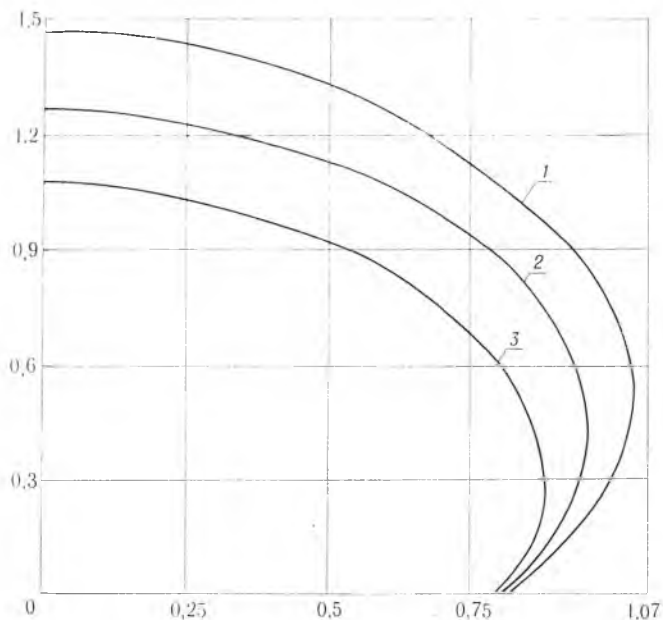


Рис. 2

для случая $G = G_0(1 + \gamma x)$, $aG_0\sigma k / (Q\mu) = 0,1$. Кривые 1—3 соответствуют значениям $\gamma L = -0,4; 0; 0,4$. На рис. 2 представлены аналогичные кривые для зависимости $G = G_0(1 + \gamma|y|)$, $G_0 = \text{const}$.

Полученные численные решения системы (5), (6) тестировались на известных аналитических. На рис. 3 построены границы застойных зон для закона $G = G_0 \exp(\gamma x)$. Сплошные линии отвечают точному решению задачи [1] при $aG_0\sigma k / (Q\mu) = 0,1$; $\gamma L = -0,5; 0; 0,5$ (кривые 1—3). Пунктирные линии (1'—3') иллюстрируют соответствующие численные решения системы (5), (6). Сопоставление результатов показывает их хорошее совпадение.

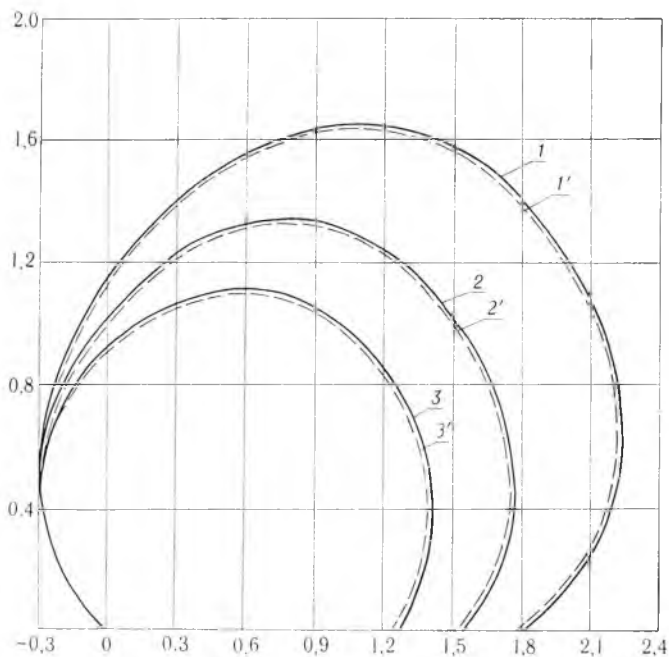


Рис. 3

И заключение отметим возможность обобщения по аналогии с [5] изложенной методики получения численных решений задач с переменным начальным градиентом на случай неоднородной пористой среды.

Список литературы

1. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань, 1978.
2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., 1976.
3. Видякин В. В., Ентов В. М., Таранчук В. Б. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 182.
4. Ортега Дж., Рейнтболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.
5. Видякин В. В., Таранчук В. Б. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 12. С. 1072.

Поступила в редакцию 11.11.90.

УДК 517.948.32:517.544

С. Л. ШТИН

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ПЯТИМЕРНОГО ВЕКТОРА

Рассмотрим векторную задачу сопряжения: найти кусочно-голоморфный вектор $F(z) = (F_1(z), \dots, F_5(z))^t$ (здесь t означает транспонирование) с линией скачков $L = L_1 \cup L_2$, где $L_1 = [-1, 0]$, $L_2 = [0, 1]$, ориентированной в направлении от начала координат, который ограничен в окрестности узлов $z = -1, 0, 1$ и имеет на бесконечности полюс порядка $\leq s$ при условии сопряжения $F^+(t) = G(t)F^-(t)$, где $G(t)$ — кусочно-постоянная матрица

$$G(t) = \begin{cases} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & t \in L_1, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in L_2. \end{cases}$$

Общая теория подобных задач приводится в [3]. В настоящей работе рассматривается задача частного вида с кусочно-подстановочной матрицей в качестве коэффициента Римана.

Необходимые для дальнейшего свойства таких матриц рассмотрены в [1]. Для матриц σ_1 и σ_2 существует такое преобразование подобия, которое разлагает их в прямую сумму мономатриц порядков 1 и 4. Это преобразование осуществляется посредством матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^3 & \lambda & \lambda^4 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \lambda & \lambda^3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \exp(2\pi i/5).$$

Перейдем к новому неизвестному вектору $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_5(z))^t$ с помощью линейной замены неизвестных $\Phi(z) = S^{-1}F(z)$.