$$\alpha_0 = |g(0) - k'x^0 - \bar{\xi}|,\ \alpha_i = \alpha_{i-1} - |k_{j_i}|(d^*_{j_i} - d_{*j_i}),\ i = \overline{1,\ s},$$

где $\bar{\xi} = \xi^*$ при $\nu = 1$, $\bar{\xi} = \xi_*$ при $\nu = -1$. Пусть $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ — такой индекс, что $\alpha_{i_0-1} > 0$, $\alpha_{i_0} \leqslant 0$. Положим $\hat{x}_j(0) = x_j^0$, $j \in J\setminus\{j_1, \dots, j_{i_0}\}$;

$$\hat{x}_j(0) = x_j^0 + (d_j^* - d_{*j})\operatorname{sign} k_j\nu,\ j \in \{j_1, \dots, j_{i_0-1}\},$$

$$\hat{x}_{j_{i_0}}(0) = \Big(g(0) - \bar{\xi} - \sum_{j\in J\setminus j_{i_0}} k_j \hat{x}_j(0)\Big)/k_{j_{i_0}}.$$

Элементы (9) при $\tau = 0$ имеют вид $\hat{x}(0)$, $T_a(0) = \{0\}$, $y_0 = (y(0) = \nu\sigma_{j_{i_0}})$.

## Список литературы


1. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса. М., 1980. С. 407.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
3. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
4. Witsenhausen H. S. // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1.
5. Schweppe F. C. // Ibid.
6. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазовых состояний динамических систем. М., 1988. С. 320.
7. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 777.
9. Костюкова О. И. Исследование линейных экстремальных задач с континуумом ограничений. Мн., 1988 / Препринт АН БССР. Ин-т математики. № 26 336. 24 с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294.



Поступила в редакцию 11.11.91.



*УДК 517.518*



*В. И. КОРЗЮК*


# ОБ ОПЕРАТОРАХ ОСРЕДНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ. I

Операция осреднения функций играет важную роль в различных вопросах. Операторы осреднения позволяют строить последовательность гладких функций, стремящихся в определенном смысле к заданной функции (см. [1—13] и др.), для разбиения единицы [13, 14], для интегрального представления [1, 15], для продолжения функций [13, 16—28]. В данной работе рассматриваются операторы осреднения с переменным шагом [6, 29]. Здесь для коммутаторов указанных операторов с дифференциальными операторами получены оценки, а также доказываются другие свойства осреднений с целью дальнейшего использования их при доказательстве разрешимости граничных задач.

Пусть $R^n$ — $n$-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Omega$ — открытое ограниченное связное множество в $R^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, представляющее собой достаточно простую геометрическую структуру. Область $\Omega$ разобьем на подобласти $G_m (m = -1, 0, 1, \dots)$, как это сделано в работе [6]. Из [6] или [30] будем использовать лемму о разбиении единицы с помощью функций $\psi_m(x)$ $(m = 0, 1, \dots)$ в следующем варианте.

**Лемма 1.** Существует последовательность неотрицательных функций $\psi_m(x) \in C^\infty(R^n)$, $m = 0, 1, \dots$, таких, что:

1) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \bar{\in} \Omega; \end{cases}$

2) $\Omega = \bigcup_{m=0}^{\infty} \operatorname{supp} \psi_m$, причем кратность покрытия множествами $\operatorname{supp}\psi_m$ не превышает двух;

3) $\operatorname{supp} \psi_m \subset G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}$, $m = 0, 1, \dots$;

4) для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1 \dots, \alpha_n)$

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leqslant c_\alpha 2^{2m|\alpha|},$$

$c_\alpha$ зависит только от $\alpha$.

Здесь $C^\infty(R^n)$ — множество бесконечно дифференцируемых в $R^n$ функций, $\operatorname{supp}\psi_m$ — носитель функций $\psi_m$ и $\operatorname{supp}\psi_m = \overline{\{x \mid \psi_m(x) \neq 0\}}$ (замыкание), $\alpha_k$ $(k = 1, \dots, n)$ — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$.

Основным здесь гильбертовым пространством будет пространство квадратично суммируемых функций $L_2(\Omega)$ с соответствующими обозначениями значений скалярного произведения $(.,.)_{L_2(\Omega)}$ и нормы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Относительно $L_2(\Omega)$ сформулируем леммы о непрерывности [13. С. 45].

**Лемма 2.** Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции $u \in L_2(\Omega)$ существует такое число $\delta(u)$, что $\|u(x+y) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon$ для любых $|y| \leqslant \delta(u)$. Здесь $u \in L_2(\Omega)$ считаем определенной на всем $R^n$, полагая $u = 0$ при $x \bar{\in} \Omega$.

**Лемма 3.** Для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in L_2(\Omega)$ можно указать $\delta(u) > 0$, что для произвольного измеримого множества $E \subset \Omega$, для которого $\operatorname{mes} E < \delta(u)$, имеет место неравенство $\left|\int_E u(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

**Лемма 4.** Для любого $u \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(u)$, что

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{1}$$

для любых $|y| \leqslant \delta(u)$.

Доказательство. Как только $u \in L_2(\Omega)$, то либо $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 0$, либо $\|u\|_{L_2(\Omega)} \neq 0$. Если $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 0$, то и $u = 0$ и неравенство (1) очевидно. В случае $\|u\|_{L_2(\Omega)} \neq 0$ для числа $\varepsilon\|u\|_{L_2(\Omega)}$ утверждение леммы 4 вытекает из леммы 2.

Рассмотрим осреднения В. И. Буренкова [6, 29], сохраняющие граничные условия,

$$J_k u(x) = J_k(\psi, \omega) u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) J_{\delta_{mk}} u(x), \tag{2}$$

$$\overset{*}{J_k} u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} J_{\delta_{mk}} (\psi_m u)(x), \tag{3}$$

где $J_{\delta_{mk}} u(x) = \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) u(y)dy$ — операторы осреднения Соболева [1]; $\omega(x) \in C^\infty(R^n)$, носитель $\operatorname{supp}\omega(x) \subset \{x \mid |x| \leqslant 1\}$, $\omega(x) \geqslant 0$, $\omega(x)$ — четная функция по каждому независимому переменному $x_j (j = 1, \dots, n)$, $\int_{R^n} \omega(x)\,dx = 1$; $\delta_{mk} \leqslant 2^{-m-4}$, $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$ выбираются в зависимости от функции $u$ (см. лемму 2), $\delta_{mk} \to 0$ при $k \to \infty$.

Характерная особенность операторов осреднения (2) и (3) та, что они сохраняют граничные условия осредняющих функций, если последние имели смысл на границе. Кроме того, для (2) и (3) характерны свойства операторов осреднения, которые будут кратко сформулированы в виде свойств. Доказательство основано на неравенстве Коши — Буняковского [31, С. 41] и других свойствах интеграла Лебега.

**J-1.** Для $u, v \in L_2(\Omega)$ справедливо равенство

$$(J_k u, v)_{L_2(\Omega)} = (u, \overset{*}{J_k} v)_{L_2(\Omega)}.$$

**J-2**. Для любого $u \in L_2(\Omega)$ $J_k u$, $\overset{*}{J_k} u \in C^\infty(\Omega)$.

**J-3**. Справедливы неравенства

$$\| J_k u \|_{L_2(\Omega)} < c \| u \|_{L_2(\Omega)},$$
$$\| \overset{*}{J_k} u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \| u \|_{L_2(\Omega)},$$

где $c > 0$ не зависит от $u$, $u \in L_2(\Omega)$.

**J-4**. Для $u \in L_2(\Omega)$ $\|J_k u - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Обозначим через $H^l(\Omega)$ пространство Соболева квадратично суммируемых вместе со всеми до порядка $l$ включительно квадратично суммируемыми обобщенными производными. Для $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$ рассмотрим коммутатор $J_k$ с оператором дифференцирования $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$), т. е.

$$[D^\alpha, J_k]\, u = D^\alpha J_k(\psi, \omega)\, u - J_k(\psi, \omega)\, D^\alpha u = \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ |\beta| \neq 0}} a_\alpha J_k(D^\beta \psi, \omega)\, D^{\alpha-\beta} u, \quad (4)$$

$$J_k(D^\beta \psi, \omega)\, D^{\alpha-\beta} u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D^\beta \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) D_y^{\alpha-\beta} u(y) dy.$$

Здесь под неравенством $\beta \leqslant \alpha$ мультииндексов $\beta$ и $\alpha$ понимаются неравенства $\beta_j \leqslant \alpha_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$; $a_\beta$ — коэффициенты формулы Лейбница частной производной $D^\alpha$ произведения двух функций.

Отметим, что последнее выражение в (4) имеет смысл для $u \in H^{|\alpha|-1}(\Omega)$. В дальнейшем под коммутатором $[D^\alpha, J_k]u$ будем понимать это выражение. Обозначим через $N$ множество натуральных чисел.

**J-5**. Для любого $u \in H^{|\alpha|-1}(\Omega)$ и любого $k \in N$ можно так выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\| [D^\alpha, J_k]\, u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k} \| u \|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}. \quad (5)$$

Для доказательства данного утверждения достаточно провести оценку в $L_2(\Omega)$ для $J_k(D^\beta\psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u$. В силу того, что при $\beta \neq 0$ $\sum_{m=0}^{\infty} D^\beta \psi_m(x) = 0$, выражение это можно представить следующим образом:

$$J_k(D^\beta \psi, \omega)\, D^{\alpha-\beta} u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D^\beta \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [D^{\alpha-\beta} u(y) - D^{\alpha-\beta} u(x)]\, dy. \quad (6)$$

Тогда

$$\| J_k(D^\beta \psi, \omega)\, D^{\alpha-\beta} u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \| D^\beta \psi_m \|_{L_\infty} \times$$
$$\times \left\| \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [D^{\alpha-\beta} u(y) - D^{\alpha-\beta} u(x)]\, dy \right\|_{L_2(G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1})}. \quad (7)$$

Из леммы 1 следует оценка

$$\| D^\beta \psi_m \|_{L_\infty} \leqslant c_\beta 2^{2m|\beta|}. \quad (8)$$

В силу леммы 4

$$\left\| \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [D^{\alpha-\beta} u(y) - D^{\alpha-\beta} u(x)]\, dy \right\|_{L_2(G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1})} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_{mk} \| D^{\alpha-\beta} u \|_{L_2(G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1})}.$$

Таким образом, при соответствующем выборе $\delta_{mk}$ в силу (8)—(9) и неравенства Коши — Буняковского (7) можно сделать сколь угодно малым через оценки в $H^{|\alpha|-1}(\Omega)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\| J_k (D^\beta \psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \| u \|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}. \tag{10}$$

Следовательно, соотношение (6) и неравенства (10) дают оценку коммутатора вида (5).

**J-6**. (*Лемма Фридрихса*). *Для любых* $u \in L_2(\Omega)$, $a \in C^1(\overline{\Omega})$ *и* $k \in N$ *можно выбрать числа* $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, *что*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} [a J_k u - J_k(au)] \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k} \| u \|_{L_2(\Omega)}. \tag{11}$$

Доказательство. Распишем подынтегральное выражение левой части (11) в удобном виде для проведения оценок в $L_2(\Omega)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [a J_k u - J_k(au)](x) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [a(x) - a(y)] u(y)\, dx + \right.$$
$$+ \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial a(y)}{\partial y_i}\right] u(y)\, dy +$$
$$\left. + \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)(a(y) - a(x))\right] u(y)\, dy. \right) \tag{12}$$

Здесь было использовано также и равенство:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)(a(y) - a(x))\right] dy = 0, \ m = 0, 1, \ldots .$$

Используя условие $a \in C^1(\overline{\Omega})$, неравенство Коши — Буняковского и лемму 4 для оценки в $L_2(\Omega)$ выражения (12), получим доказываемое неравенство (11) при соответствующем выборе $\delta_{mk}(u)$.

Утверждения **J-2** — **J-6** справедливы и для оператора $J_k^*$.

## Список литературы


1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950; Новосибирск, 1962.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
3. Ильин В. П. // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 64. С. 61.
4. Gagliardo E. // Ricerche mat. 1958. V. 7. № 1. Рус. пер.: Сб. переводов. Математика. 1961. Т. 5. № 4. С. 87.
5. Казарян Г. Г. // Мат. заметки. 1967. Т. 2. № 1. С. 45.
6. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 39.
7. Буренков В. И. // Тр. Мат. ин-та. АН СССР. 1974. Т. 131. С. 51.
8. Буренков В. И. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 1. С. 12.
9. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1972. Т. 117. С. 62.
10. Буренков В. И. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 2. С. 259.
11. Burenkov V. I. // Nonlinear analysis, function spaces and applications. Leipzig, 1982. V. 2. P. 5. (Teubner — Texte Math., Bd. 49).
12. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1987. Т. 180. С. 68.
13. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
14. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 24.
15. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
16. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 140. С. 27.
17. Никольский С. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 3. С. 409.
18. Бабич В. М. // УМН. 1953. Т. 8. № 2. С. 111.
19. Calderon A. P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 368.
20. Бесов О. В. // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 89. С. 517.
21. Ильин В. П. // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 7. С. 573.
22. Басов О. В., Ильин В. П. // Мат. сб. 1968. Т. 75 (117). Вып. 4. С. 483.
23. Stein E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeto, 1970. Рус. пер.: Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973.
24. Буренков В. И. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 2. С. 269.
25. Буренков В. И., Файн Б. Л. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 52.
26. Буренков В. И. // Там же. 1976. Т. 140. С. 27.

27. Успенский С. В. // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7. № 2. С. 409.
28. Буренков В. И., Гольдман М. Л. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 31.
29. Deny J., Lions J. L. // Ann. Inst. Fourier. 1953—54. V. 5. P 305.
30. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 24.
31. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 10.12.91.

*УДК 532.546*

*В. В. ВИДЯКИН, И. Р. ХАРРАЗОВА*

# К РЕШЕНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Рассматривается плоская задача стационарной фильтрации вязкопластической жидкости в однородном недеформируемом пористом пласте по следующему закону с начальным градиентом [1]:

$$\mathbf{u} = 0, \ |\nabla p| < G; \ \mathbf{u} = -(k/\mu)\nabla p, \ |\nabla p| \geqslant G. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации; $\nabla p$ — градиент давления; $k$ — коэффициент проницаемости; $\mu$ — вязкость; $G$ — начальный градиент. Исследуемое течение обладает рядом качественных особенностей, в частности, в областях, где $|\nabla p| < G$, образуются застойные зоны. Предположим, что пласт вскрыт системой $m$ нагнетательных и $l$ добывающих скважин, расположенных таким образом, что существует только одна застойная зона, занимающая внешность некоторого замкнутого кусочно-гладкого контура $\partial\Omega$.

Расчет предельно-равновесной конфигурации границы застойной зоны сводится к следующей краевой задаче для отыскания давления $p$ и формы контура $\partial\Omega$ [2]:

$$\Delta p = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\partial p/\partial n = 0, \ |\partial p/\partial s| = G \quad (x, y) \in \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\lim_{\gamma_i \to 0} [\int (k/\mu)(\partial p/\partial n_i)\, d\sigma] = Q_i, \tag{4}$$

где $n$, $s$ — внутренняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$; $\gamma_i$ — контур, охватывающий $i$-ю скважину с дебитом $Q_i$, расположенную в точке $(x_i, y_i)$ $(i = 1, m + l)$; $n_i$ — внутренняя нормаль к $\gamma_i$, $x$, $y$ — декартовы координаты в плоскости течения. Заметим, что сформулированная краевая задача допускает другую физическую интерпретацию, соответствующую задаче об определении предельно-равновесных конфигураций целиков остаточной вязкопластической нефти, возникающих при вытеснении ее водой. Ее решение в точной постановке вызывает большие трудности и может быть получено только в частных случаях для специальных законов изменения начального градиента [1]. В настоящей работе приводится метод, позволяющий численно исследовать (2)—(4) для широкого класса зависимостей $G(x, y)$.

По аналогии с [3] распределение давления будем искать в виде суперпозиции потенциала внешнего поля $\varphi(x, y)$ и потенциала простого слоя с плотностью $\nu(\sigma)$, сосредоточенного на контуре $\partial\Omega$:

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \ln R^{-1}\, d\sigma,$$

где

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m+l} \frac{Q_i\mu}{4\pi k} \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2], \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

$\sigma$ — дуговая абсцисса точки $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$.