Список литературы

1. Redfield A. G. // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 1787.
2. Argyres A. N., Kelley P. L. // Phys. Rev. 1964. V. 134. P. A98.
3. Апанасевич П. А., Низовцев А. П. // Квантовая электроника. 1975. Т. 2. С. 1654.
4. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. Мн., 1977. С. 189.
5. Яковленко С. И. Радиационно-столкновительные явления. М., 1984.
6. DeVoe R. G., Brewer R. G. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1269.
7. Apanasevich P. A., Kilin S. Y., Nizovtsev A. P., Onishchenko N. S. // Opt. Commun. 1984. V. 52. P. 279.
8. Apanasevich P. A., Kilin S. Y., Nizovtsev A. P., Onishchenko N. S. // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. V. 3. P. 587.
9. Endo T., Muramoto T., Hashi T. // Opt. Commun. 1984. V. 51. P. 163.
10. Muramoto T., Szabo A. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 5938.
11. Szabo A., Muramoto T. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 3992.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 517.926

А. П. ХАПАЛЮК

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Классические решения линейного дифференциального уравнения Эйлера n-го порядка (a_k — постоянные числа)

$$\sum a_k x^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

хорошо известны. Их обычно ищут в виде $\varphi_1(x) = x^\lambda$ [1, 2] (или $|x|^\lambda$ [3]). После подстановки $\varphi_1(x)$ в (1) и сокращения на общий множитель x^λ получается алгебраическое уравнение n-го порядка относительно λ (характеристическое уравнение):

$$\prod_{j=1}^{n} (\lambda - \alpha_j) = 0, \tag{2}$$

простые корни которого α_j (характеристические числа) определяют на всей оси x n линейно независимых частных решений вида:

$$\varphi_{1j}(x) = x^{\alpha_j}. \tag{3}$$

Считается [1—3], что это фундаментальная система и любое другое решение должно быть линейной комбинацией решений (3). Однако оказывается, что это утверждение неверно. С помощью подстановки $\varphi_2(x) = x^\lambda \operatorname{sgn} x$, которая приводит к тому же уравнению (2), можно получить еще n других решений

$$\varphi_{2j}(x) = x^{\alpha_j} \operatorname{sgn} x. \tag{4}$$

В результате получается, что уравнение n-го порядка (1) имеет $2n$ линейно независимых решений.

Появление дополнительных решений можно пояснить следующим образом. Соответствующее нецелому характеристическому числу α классическое решение x^α является многозначной функцией с точкой ветвления $x = 0$ и поэтому недоопределено. При любом варианте выбора ветвей, число которых может быть велико, эта функция будет решением. Однако для любого α среди всех вариантов выбора ветвей только две функции линейно независимы, остальные являются их линейными комбинациями. Эти две базисные функции и будут двумя решениями уравнения Эйлера, соответствующими одному и тому же характеристическому числу. Они не определяются однозначно, и базис можно выбрать по-разному. Один из них построим следующим образом. На положительной части оси x возьмем арифметическое значение функции x^α. При переходе через точку ветвления на отрицательную ее часть можно попасть на любую ветвь, что запишется следующим образом (m — целое число):

$$x^\alpha = x_+^\alpha + (-1)^\alpha x_-^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha e^{i\alpha\pi(2m+1)}, \tag{5}$$

где [4, 5]

$$x_+ = \begin{cases} x \\ 0 \end{cases}, \quad x_- = \begin{cases} 0 & (x>0) \\ -x & (x<0) \end{cases}. \tag{6}$$

Любой вариант выбора ветвей x^α можно представить как линейную комбинацию базисных функций x_+^α и x_-^α. Этот базис, по-видимому, наиболее простой. Назовем его каноническим.

В некоторых случаях более удобным может оказаться другой базис, для функций которого используем специальные обозначения и определим их формулами [4]:

$$(x+i0)^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha e^{i\alpha\pi}, \quad (x-i0)^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha e^{-i\alpha\pi}. \tag{7}$$

Этот базис назовем аналитическим, так как его базисные функции можно считать сужением (предельным значением) на действительную ось аналитической вне ее функции

$$\lim_{y\to+0} (x \pm iy)^\alpha = (x \pm i0)^\alpha. \tag{8}$$

Имеется еще один практически очень удобный базис, который назовем четно-нечетным; одна базисная функция его будет четной, другая — нечетной, и определяются они по формулам:

$$|x|^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha, \quad |x|^\alpha \operatorname{sgn} x = x_+^\alpha - x_-^\alpha. \tag{9}$$

Очевидно, что базисные функции любого из этих базисов можно считать линейно независимыми решениями уравнения (1). Оба эти решения можно рассматривать как результат уточнения классического решения, которое неоднозначно определено. В частности, решения (3)—(4) легко представить в виде линейной комбинации введенных выше базисных функций.

Такое уточнение классических решений может показаться несущественным и даже тривиальным. Тем не менее оно выводит нас за рамки классического анализа в область обобщенных функций. Базисные функции всех трех базисов (6) — (9) являются типичными обобщенными функциями [4, 5]. В соответствии с этой терминологией все $2n$ решений уравнения (1) следует считать обобщенными функциями.

Рассмотрим теперь случай кратных, но опять не целых, характеристических чисел. Предположим, что характеристическое число α m-кратно. Известно [1—3], что классические решения, соответствующие этому числу, имеют вид $x^\alpha \ln^k|x|$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$). Используя вышеизложенные соображения, легко показать, что еще m линейно независимых функций вида $x^\alpha \ln^k|x| \operatorname{sgn} x$ также будут решениями. Поэтому и для кратных характеристических чисел число обобщенных решений в два раза больше классических.

Переход к целым характеристическим числам приводит к нетривиальным осложнениям, что видно уже из определения функций аналитического базиса (7). Сущность возникающих здесь проблем можно изучить фактически без ограничения общности на примере решения уравнения Эйлера первого порядка:

$$x\frac{d\varphi}{dx} - \alpha\varphi = 0. \tag{10}$$

При нецелом α решениями будут функции x^α и $x^\alpha \operatorname{sgn} x$. Дело сводится к изучению этих решений как функций параметра α. Первое решение x^α как функция комплексного переменного α является аналитической функцией и поэтому остается решением при любом значении α, включая целые значения. Второе решение $x^\alpha \operatorname{sgn} x$ является мероморфной функцией комплексной переменной α [4]. Полюса ее расположены в точках целых отрицательных значений α: ($\alpha = -s$, $s = 1, 2, \ldots$), что является причиной упомянутого осложнения. Вне этих полюсов функция будет вторым решением уравнения (10). Осталось выяснить роль этих полюсов. Вблизи полюса ее можно разложить в ряд Лорана по переменной $\alpha + s$ [4]:

$$x^{\alpha} \operatorname{sgn} x = \frac{c_{-1}(x, s)}{\alpha + s} + F(x, s), \tag{11}$$

где первое слагаемое — главная, а второе — регулярная части ряда Лорана, $c_{-1}(x, s)$ — вычет функции в полюсе $\alpha = -s$.

Решение уравнения (1), как известно, определяется с точностью до множителя, который может быть функцией параметра α. Воспользуемся этим свойством и возьмем решение в виде $v(x, \alpha) = (\alpha + s)x^{\alpha} \operatorname{sgn} x$, которое уже в точке $\alpha = -s$ не имеет полюса и равно вычету, который как функция переменного x будет дополнительным решением уравнения (10). В явном виде это решение запишется [4] так:

$$\lim_{\alpha \to -s} (\alpha + s)\, x^{\alpha} \operatorname{sgn} x = c_{-1}(x, s) = 2(-1)^{s} \frac{\delta^{(s-1)}(x)}{(s-1)!} = 2\,\frac{\delta(x)}{x^{s-1}}. \tag{12}$$

Каждому числу s уравнения Эйлера соответствуют два линейно независимых решения x^{-s} и $\delta^{(s-1)}(x)$, которые можно рассматривать как базисные функции четно-нечетного базиса.

Приведем еще один метод получения этих решений, который дает возможность взглянуть на них с другой стороны. Будем исходить из функций аналитического базиса (8). На первый взгляд может показаться, что при целом α ($\alpha = -s$) знаки $\pm$ не играют роли. Во многих случаях так оно и есть. Однако в матанализе встречаются операции, при выполнении которых знаки в (8) будут существенными. Для конкретности возьмем случай $\alpha = -1$ и вычислим интеграл:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x^{-1}\, dx, \tag{13}$$

где функция $f(x)$ при $x = 0$ не равна нулю и бесконечности. Типичный метод вычисления следующий. Разобьем его на три слагаемых:

$$J = \int_{-\infty}^{-\tau} f(x)\, x^{-1}\, dx + \int_{\tau}^{\infty} f(x)\, x^{-1}\, dx + \int_{-\tau}^{\tau} f(x)\, x^{-1}\, dx. \tag{14}$$

Вычислим каждый из этих интегралов по отдельности при достаточно малом τ, а затем устремим τ к нулю. Сумма первых двух интегралов определяет главное значение по Коши интеграла (13). В третьем интеграле заменим прямолинейный отрезок интегрирования на полуокружность. Здесь уже проявляется неопределенность подынтегральной функции, так как полуокружность можно провести двояким образом в верхней или нижней полуплоскости. В обоих случаях интегралы вычисляются элементарно:

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\, x^{-1}\, dx = \mp i\pi f(0) = \mp i\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx. \tag{15}$$

Верхний знак означает, что полуокружность проведена в верхней, нижний — в нижней полуплоскости. Отсюда видно, что обычная функция x^{-1} в (13) после уточнения порождает две разные обобщенные функции, которые и будут линейно независимыми решениями уравнения (10). Естественно, знаки в (15) однозначно связаны со знаком в равенстве (8). Поэтому имеем:

$$\lim_{y \to +0} (x \pm iy)^{-1} = (x \pm i0)^{-1} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x), \tag{16}$$

где буква P обозначает главное значение по Коши функции x^{-1}. Сумма и разность функций аналитического базиса (16) дает прежнее значение функций четно-нечетного базиса.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести для любого s, и в результате получим функции аналитического базиса:

$$\lim_{y\to+0}(x\pm iy)^{-s}=(x\pm i0)^{s}\equiv P(x^{-s})\mp i\pi\frac{\delta(x)}{x^{s-1}}. \quad (17)$$

Отсюда легко получаются функции четно-нечетного базиса решений

$$(x+i0)^{-s}+(x-i0)^{-s}=2P(x^{-s}),\ \ (x+i0)^{-s}-(x-i0)^{s}=2i\pi\frac{\delta(x)}{x^{s-1}}. \quad (18)$$

Буква P в (17)—(18) обозначает, что x^{-s} — обобщенная функция и понимается не в обычном (классическом) смысле. Если ее понимать в обычном смысле, то из вышеизложенного видно, что в интегралах типа (13) она оказывается недоопределенной. Как обобщенная функция она становится однозначной, но за счет того, что интеграл типа (13) вычисляется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)P(x^{-s})\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}f(x)\Big|_{x=0}\right]x^{-s}\,dx \quad (19)$$

и называется регулязацией соответствующего обычного интеграла [4].

Осталось рассмотреть случай кратных отрицательных целых корней характеристического уравнения. Случай целых неотрицательных кратных корней существенно не выделяется, и соответствующие решения определяются по общим формулам. Предположим, что характеристическое уравнение (2) имеет множитель $(\lambda+s)^m$ (число s — m-кратный корень). Как известно, обычные m решений, соответствующие такому характеристическому числу, имеют вид $x^{-s}\ln^k|x|$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$. Дополнительные решения при $k\neq 0$ определяются стандартной формулой $x^{-s}\ln^k|x|\operatorname{sgn}x$. При $k=0$ функция $x^{-s}\operatorname{sgn}x$ не является решением, недостающим решением будет $\delta^{(s-1)}(x)$. Например, легко проверить, что частными решениями уравнения второго порядка $(s=1,\ m=2)$:

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+3x\frac{d\varphi}{dx}+\varphi=0 \quad (20)$$

будут четыре линейно независимые функции x^{-1}, $x^{-1}\ln|x|$, $\delta(x)$, $x^{-1}\ln|x|\operatorname{sgn}x$.

Заметим, что полученные здесь результаты, в частности, удвоения числа линейно независимых решений, не противоречат обычным теоремам теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Утверждение о том, что дифференциальное уравнение n-го порядка имеет n линейно независимых частных решений, доказывается для интервала, на котором нет особых точек. В нашем случае $x=0$ является особой точкой, и это утверждение для интервала, включающего особую точку, уже недействительно.

Аналогичные ситуации имеют место для других дифференциальных уравнений, в частности для уравнения Бесселя [6].

Список литературы

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 2.
2. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1955.
3. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Мн., 1977.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959. Вып. 1.
5. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.
6. Хапалюк А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1. С. 3.

Поступила в редакцию 28.11.91.