

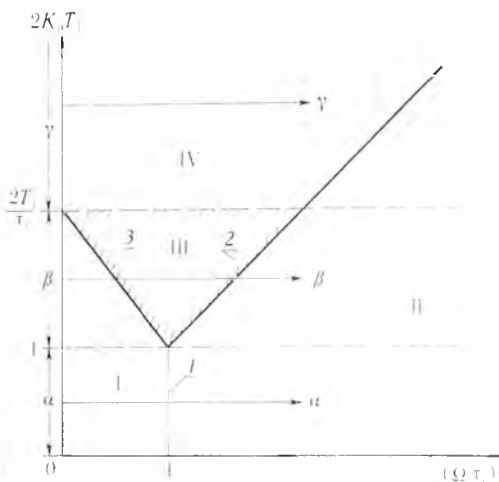
НЕМАРКОВСТЬ ДЕФАЗИРОВКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В КОГЕРЕНТНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ. Ч. I

Дефазировка квантовых систем (разрушение когерентности фаз квантовых состояний объектов, составляющих ансамбль) под действием различных внешних факторов оказывает определяющее влияние на форму спектральных линий и на ход нестационарных когерентных нелинейно-оптических (НКНО) явлений. С другой стороны, дефазировка и фазовая самоорганизация систем составляют предмет исследований в рамках синергетического подхода, который в последние годы широко применяется при изучении самых различных классов объектов, представляющих собой ансамбли взаимодействующих подсистем. Это позволяет использовать как синергетический подход для изучения спектральных и НКНО явлений, так и наоборот — спектральные и нестационарные оптические методы для исследования общих синергетических аспектов.

Обычно процесс дефазировки описывается введением в оптические уравнения Блоха феноменологического параметра T_2 — времени дефазировки. Однако в последнее время использование методов высокого спектрального и временного разрешения, применение в оптических экспериментах мощных высокостабильных перестраиваемых лазеров и лазеров, генерирующих сверхкороткие световые импульсы, позволило получить ряд результатов, которые невозможно объяснить в рамках уравнений Блоха, основанных на марковской модели формирования дефазировки квантовых систем, находящихся в сильном лазерном поле.

Неприменимость блоховских уравнений для описания некоторых спектроскопических экспериментов связана прежде всего с нарушением лежащего в их основе марковского приближения, соответствующего пренебрежимой малости времени корреляции τ_c дефазирющих возмущений по сравнению с другими характерными временами квантовой системы. Из общих термодинамических соображений ясно, что учет немарковости процесса дефазировки (т. е. учет конечного времени корреляции τ_c реальных дефазирющих возмущений или, что то же — учет конечной ширины их спектра $\gamma_c = \tau_c^{-1}$) может быть существенным в двух случаях: когда состояние релаксирующей квантовой системы успевает изменяться на временах $\sim \tau_c$ либо в процессе самой дефазировки, или под действием внешних причин, например, электромагнитного излучения.

Первый случай реализуется при выполнении условия $\tau_c \geq T_2$, которое может иметь место для сильных, слабо стохастических дефазирющих возмущений, характеризующихся большим временем корреляции τ_c и высокой эффективностью воздействия на квантовую систему. Второй случай связан с выполнением соотношения $\tau_c \geq t_{int}$, где t_{int} — характерное время изменения квантовой системы под действием излучения, определяющееся в резонансных условиях обобщенной частотой Раби $\Omega = (\varepsilon^2 + 4V^2)^{1/2}$ (ε — расстройка резонанса, $2V$ — обычная частота Раби): $t_{int} = \Omega^{-1}$. Очевидно, что при выполнении условия $\Omega \tau_c \geq 1$ де-



К классификации квантовых систем по свойствам дефазирющих возмущений и типам поведения при релаксации

фазирующие возмущения оказываются промодулированными рабиевскими осцилляциями, в результате чего процесс дефазировки становится зависящим от характеристик излучения. Особенно существенные изменения имеют место при $2V\tau_c \gg 1$, когда процесс дефазировки начинает зависеть от интенсивности излучения (нелинейность дефазировки). В предельном случае $\Omega\tau_c \gg 1$ дефазирющие возмущения эффективно усредняются до нуля и квантовая система вообще перестает чувствовать окружение.

Различные ситуации, возникающие при учете конечного времени памяти τ_c дефазирющих возмущений, можно проиллюстрировать схемой (см. рисунок). Здесь фигурируют следующие характерные времена: 1) время корреляции τ_c ; 2) время взаимодействия с излучением $t_{int} = \Omega^{-1}$; 3) время спонтанной релаксации $T_1 = A^{-1}$ (A — вероятность спонтанных переходов); 4) время дефазировки $T_2 = (K_0 + A/2)^{-1}$, где K_0 — блоховская скорость «чистой» дефазировки под действием окружения, которую приближенно можно оценить как интенсивность фурье-компоненты спектра энергии дефазирющих возмущений U^τ на нулевой частоте:

$K_0 = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle U^\tau U^0 \rangle$. По аналогии с K_0 можно ввести зависящую от интенсивности излучения величину K_Ω , имеющую смысл фурье-компоненты корреляционной функции $\langle U^\tau U^0 \rangle$ на частоте Ω .

В зависимости от соотношения этих времен различные механизмы дефазировки и системы можно классифицировать по свойствам дефазирющих возмущений и типам поведения при релаксации.

Прежде всего можно выделить области сильно и слабо стохастических возмущений, определяемые соотношениями $K_0\tau_c \ll 1$ и $K_0\tau_c \gg 1$ соответственно. На рисунке эти области разделены горизонтальной прямой $2K_0T_1 = 2T_1/\tau_c$. Прямая 1 ($\Omega\tau_c = 1$) разделяет плоскость на участки, в которых излучение существенно изменяет состояние системы за время τ_c ($\Omega\tau_c \gg 1$) или полевое воздействие за этот промежуток времени незначительно ($\Omega\tau_c \ll 1$). Линия 2 выделяет область параметров, где влияние дефазирющих возмущений U^τ незначительно ($2K_\Omega \ll A$). Она проведена для $K_\Omega = K_0/(\Omega\tau_c)^2$, что приближенно (при $\Omega\tau_c \gg 1$) соответствует лоренцовскому спектру дефазирющих возмущений $K_\Omega = K_0/(1 + \Omega^2\tau_c^2)$.

Соединяя точки (1; 1) и $(2T_1/\tau_c; 0)$ прямой 3, получаем, что плоскость изменения параметров условно разделяется на 4 области: (I) — область применимости уравнений Блоха ($\Omega\tau_c \ll 1$, $K_0\tau_c \ll 1$), (II) — область «подавления» дефазирющих возмущений ($\Omega\tau_c \gg 1$, $2K_0T_1 \ll (\Omega\tau_c)^2$). Существование такой области впервые было предсказано Редфильдом в 1953 г. [1] при термодинамическом рассмотрении релаксации спиновой системы в сильном радиочастотном поле. Поэтому ее можно назвать редфильдовской. (III, IV) — области, где наиболее существенны эффекты и зависимости, связанные с немарковостью и нелинейностью процессов дефазировки. Они соответствуют сильно и слабо стохастическим возмущениям.

По поведению при изменении интенсивности можно выделить три типа систем: (I) α — тип ($T_1 < T_2$) — при увеличении поля система переходит из блоховской области сразу в редфильдовскую; (II) β — тип ($T_1 > T_2 > \tau_c$) — при возрастании поля система проходит последовательно блоховскую, переходную и редфильдовскую области; (III) γ — тип ($T_2 < \tau_c$) — даже в случае слабых оптических полей ($\Omega\tau_c \ll 1$) система не описывается блоховскими уравнениями.

Идеи, схематически изложенные выше, уже неоднократно высказывались ранее. Их истоки в теоретической радиоспектроскопии, где было предсказано явление замедления фазовой релаксации в сильном радиочастотном поле [1], а также построены формально точные интегродифференциальные кинетические уравнения (КУ) для матрицы плотности спиновой подсистемы, учитывающие, в отличие от уравнений Блоха, не-

марковость и нелинейность процесса дефазировки [2]. В 60-е годы в связи с разработкой теории взаимодействия мощного когерентного лазерного излучения с веществом эти идеи проникли в оптику. В частности, в работах [3, 4] на основе обобщенных КУ были рассмотрены такие спектрально-оптические проявления нелинейности процессов дефазировки, как эффект полевого сужения линий поглощения мощного излучения, а также слабой пробной волны в присутствии сильного излучения. В 70-е годы наиболее активно исследовались различные аспекты модификации лазерным излучением столкновительного уширения, связанного с дефазирющими столкновениями [5]. Однако вследствие малости времен корреляции, имеющих в данном случае смысл средней длительности столкновения ($\tau_c \sim 10^{-12}$ с), условия проявления, например нелинейности процесса столкновительной дефазировки, были достаточно экзотическими и реализовывались лишь при интенсивностях порядка сотен МВт/см². Отметим, что в соответствии с предложенной классификацией рисунка дефазирющие столкновения в разреженных газах соответствуют случаю сильно стохастических дефазирющих возмущений, а поведение систем при увеличении поля можно отнести к α -типу.

Существенным вкладом в изучение немарковости и нелинейности процессов дефазировки стал эксперимент Де-Воя и Брюэра [6], в котором было обнаружено существенное отклонение полевой зависимости скорости затухания сигнала свободной поляризации в низкотемпературном кристалле $\text{Pr}^{3+} : \text{LaF}_3$ от блоховских предсказаний. Дефазировка оптического перехода иона Pr^{3+} в этом кристалле происходит вследствие стохастической модуляции его частоты из-за парных переворотов спинов ядер фтора, связанных с ядерным спином Pr^{3+} диполь-дипольным взаимодействием. Эксперимент [6] послужил пробным камнем для многочисленных теоретических работ, в которых применялись различные модели стохастических флуктуаций частоты перехода Pr^{3+} (модели гаусс-марковского, телеграфного, обобщенного телеграфного процессов). Использование известных статистических свойств этих процессов позволило построить обобщенные КУ для матрицы плотности примесного иона и аналитически рассчитать сигнал распада свободной поляризации. Подгонкой значения времени корреляции τ_c удалось в основном правильно объяснить экспериментальные данные [6] в рамках различных моделей. Найденные значения τ_c позволили отнести $\text{Pr}^{3+} : \text{LaF}_3$ к системам β -типа [7].

Нелинейность процессов дефазировки изучалась также в серии экспериментов [9—11] на разреженных образцах рубина, помещенных в постоянное магнитное поле при низких температурах. Существенные отклонения от блоховских предсказаний были зарегистрированы в опытах по изучению мощного уширения провалов, выжигаемых нестационарно (за времена $T \ll T_1$) в неоднородно-уширенном оптическом переходе ${}^4A_2(-1/2) \rightarrow E(-1/2)$ ионов Cr^{3+} в рубине [9], а также при исследовании эффектов насыщения при распаде нестационарно возбуждаемой свободной поляризации для того же перехода в рубине [11]. Анализ последнего эксперимента на основе телеграфной и гаусс-марковской моделей флуктуации частоты оптического перехода Cr^{3+} показал [11], что сколь-нибудь удовлетворительное описание экспериментальных данных удастся получить при $\tau_c \approx T_2$. Этот вывод, однако, противоречил экспериментальным результатам по затуханию сигнала ротационного эха в рубине [10], согласно которым наблюдаемое затухание было экспоненциальным в широком диапазоне интенсивностей излучения, что соответствовало предсказаниям оптических уравнений Блоха, тогда как при $\tau_c \approx T_2$ ожидалась существенная неэкспоненциальность затухания эхо-сигнала. Таким образом, к настоящему времени удовлетворительное объяснение с единой точки зрения имеющихся экспериментальных данных по выжиганию провалов, распаду свободной поляризации и затуханию ротационного эха в рубине отсутствует. Попытка такого анализа указанных экспериментов [10—11] и делается в настоящем сообщении. Исходной идеей

является предположение о принадлежности $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ к системам γ -типа, поддерживаемое, во-первых, полученным в [11] предварительным условием $\tau_c \approx T_2$ и, во-вторых, тем фактом, что в отличие от иона Pr^{3+} в системе β -типа $\text{Pr}^{3+}:\text{LaF}_3$, имеющего только ядерный спиновый момент, у иона Cr^{3+} отличен от нуля спин электронной оболочки, благодаря чему он существенно сильнее взаимодействует с окружением. Для описания всех трех экспериментов используются полученные ранее [7] неавтономные обобщенные КУ стохастической теории релаксации. В качестве модели стохастических флуктуаций частоты резонансного оптического перехода иона Cr^{3+} выбран телеграфный процесс (ТП). Выбор такой простейшей модели обусловлен тем, что для нее построены КУ являются точными при произвольном соотношении параметров случайного процесса (времени корреляции τ_c и дисперсии σ), а также при произвольных интенсивности излучения и расстройке резонанса. Поэтому именно она позволяет исследовать эффекты нелинейности процессов дефазировки для γ -систем.

Перейдем к сравнительному анализу нестационарных когерентных оптических явлений. Исходным пунктом анализа являются стохастические уравнения Лиувилля, описывающие взаимодействие с мощным излучением квантовой системы, частота резонансного перехода ($2 \rightarrow 1$) которой флуктуирует под действием окружения: $\omega_{21}(t) = \omega_2 + \varepsilon_t$, где ε_t — телеграфный процесс, характеризующийся частотой скачков ν ($\tau_c = \nu^{-1}$) и дисперсией σ . После их усреднения по реализациям процесса ε_t для матрицы плотности σ_{ij}^t квантовой системы получаем [7]:

$$\dot{\sigma}_{22}^t = -\dot{\sigma}_{11}^t = iV\sigma_{21}^t - iV\sigma_{12}^t, \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{21}^t &= (\dot{\sigma}_{12}^t)^* = -i\varepsilon\sigma_{21}^t - iV(\sigma_{22}^t - \sigma_{11}^t) - \\ &- \int_0^t d\tau \gamma^{t-\tau} \sigma_{21}^\tau - \int_0^t d\tau \beta^{t-\tau} \sigma_{12}^\tau, \end{aligned} \quad (1b)$$

где

$$\gamma^{t-\tau} = \sigma^2 e^{-\nu(t-\tau)} [2s^2 + c_+^2 e^{-i\Omega(t-\tau)} + c_-^2 e^{i\Omega(t-\tau)}] / 4, \quad (2a)$$

$$\beta^{t-\tau} = \sigma^2 e^{-\nu(t-\tau)} s^2 [\cos \Omega(t-\tau) - 1] / 2 \quad (2b)$$

и $s = 2V/\Omega$, $c = \varepsilon/\Omega$, $c_{\pm} = 1 \pm c$. В уравнениях (1) не учитываются спонтанные переходы $2 \rightarrow 1$, поскольку все анализируемые эксперименты [9—11] выполнялись в нестационарных условиях $t \ll T_1$.

Нестационарное решение уравнений (1) имеет вид:

$$\sigma_{ij}^t = \sum_{\alpha} e^{p_{\alpha} t} \lim_{p \rightarrow p_{\alpha}} (p - p_{\alpha}) \sigma_{ij}^{[p]} \quad (3)$$

и выражается через лапласовские образы $\sigma_{ij}^{[p]}$ элементов матрицы плотности и корни характеристического уравнения системы (1), которое в данном случае сводится к

$$x^3 + 2(\Omega^2 + \sigma^2)x^2 + [(\Omega^2 + \sigma^2)^2 + \Omega^2\nu^2 - 4\varepsilon^2\sigma^2]x + 4V^2\nu^2\sigma^2 = 0, \quad (4)$$

где $x = p(p + \nu)$. Шесть корней p_{α} распадаются на пары $p_{\alpha\pm} = -\nu/2 \pm \sqrt{x_{\alpha} + (\nu/2)^2}$ ($\alpha = 0, 1, 2$). Два действительных корня p_{0+} и $p_{0-} = -\nu - p_{0+}$ отрицательны и ограничены по величине $0 \leq |p_{0\pm}| \leq \nu$, а остальные попарно комплексно сопряжены $p_{1+} = (p_{2+})^*$, $p_{1-} = (p_{2-})^* = -\nu - p_{1+}$. В большинстве рассматриваемых случаев хорошим приближением для корня x_0 уравнения (4) является соотношение $x_0 \approx -4V^2\nu^2\sigma^2 / [(\Omega^2 + \sigma^2)^2 + \Omega^2\nu^2 - 4\varepsilon^2\sigma^2]$, справедливое при $x_0 \ll \Omega^2 + \sigma^2$ или $x_0 \ll \nu^2$. Веса вкладов, связанных с различными корнями p_{α} , отличаются для разных нестационарных оптических явлений. Как показывают расчеты, вклад, обусловленный корнем p_{0+} , является определяющим при описании выжигания провалов и распада свободной поляризации, в то время как корни p_{1+} и p_{2+} определяют сигнал вращательного эха.

Список литературы

1. Redfield A. G. // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 1787.
2. Argures A. N., Kelley P. L. // Phys. Rev. 1964. V. 134. P. A98.
3. Апанасевич П. А., Низовцев А. П. // Квантовая электроника. 1975. Т. 2. С. 1654.
4. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. М., 1977. С. 189.
5. Яковленко С. И. Радиационно-столкновительные явления. М., 1984.
6. DeVoe R. G., Brewer R. G. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1269.
7. Apanasevich P. A., Kilin S. Y., Nizovtsev A. P., Onishchenko N. S. // Opt. Commun. 1984. V. 52. P. 279.
8. Apanasevich P. A., Kilin S. Y., Nizovtsev A. P., Onishchenko N. S. // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. V. 3. P. 587.
9. Endo T., Muramoto T., Hashi T. // Opt. Commun. 1984. V. 51. P. 163.
10. Muramoto T., Szabo A. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 5938.
11. Szabo A., Muramoto T. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 3992.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 517.926

А. П. ХАПАЛЮК

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Классические решения линейного дифференциального уравнения Эйлера n -го порядка (a_k — постоянные числа)

$$\sum a_k x^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) = 0 \quad (1)$$

хорошо известны. Их обычно ищут в виде $\varphi_1(x) = x^\lambda$ [1, 2] (или $|x|^\lambda$ [3]). После подстановки $\varphi_1(x)$ в (1) и сокращения на общий множитель x^λ получается алгебраическое уравнение n -го порядка относительно λ (характеристическое уравнение):

$$\prod_{j=1}^n (\lambda - \alpha_j) = 0, \quad (2)$$

простые корни которого α_j (характеристические числа) определяют на всей оси x n линейно независимых частных решений вида:

$$\varphi_{1j}(x) = x^{\alpha_j}. \quad (3)$$

Считается [1—3], что это фундаментальная система и любое другое решение должно быть линейной комбинацией решений (3). Однако оказывается, что это утверждение неверно. С помощью подстановки $\varphi_2(x) = x^\lambda \operatorname{sgn} x$, которая приводит к тому же уравнению (2), можно получить еще n других решений

$$\varphi_{2j}(x) = x^{\alpha_j} \operatorname{sgn} x. \quad (4)$$

В результате получается, что уравнение n -го порядка (1) имеет $2n$ линейно независимых решений.

Появление дополнительных решений можно пояснить следующим образом. Соответствующее нецелому характеристическому числу α классическое решение x^α является многозначной функцией с точкой ветвления $x = 0$ и поэтому недоопределено. При любом варианте выбора ветвей, число которых может быть велико, эта функция будет решением. Однако для любого α среди всех вариантов выбора ветвей только две функции линейно независимы, остальные являются их линейными комбинациями. Эти две базисные функции и будут двумя решениями уравнения Эйлера, соответствующими одному и тому же характеристическому числу. Они не определяются однозначно, и базис можно выбрать по-разному. Один из них построим следующим образом. На положительной части оси x возьмем арифметическое значение функции x^α . При пе-