Физика

УДК 530.12

М. Н. ПОЛОЗОВ, Х. ШЭБЕ (Германия)

ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ОТО

Электрореологический эффект (ЭРЭ) проявляется в изменении вязкости некоторых жидкостей под действием внешнего электрического поля. Поскольку гравитационное поле также приводит к изменению свойств жидкостей, представляет интерес исследование совместного влияния гравитационного и электромагнитного полей на вязкие свойства жидкостей. Естественно, что такое рассмотрение должно проводиться в рамках общерелятивистской теории гравитации. В данной работе к анализу ЭРЭ привлекается развитая авторами в [1, 2] теория эволюции материальных параметров. Найдены первые поправочные члены, обязанные движению среды во внешнем гравитационном поле. Полученные результаты применяются к системе, движущейся по круговой орбите в поле Шварцшильда.

1. **Общерелятивистский подход к ЭРЭ.**

Рассмотрим жидкость, движущуюся в 4-мерном псевдоримановом многообразии V^4 сигнатуры $+2$ с метрическим тензором g_{ab} (индексы $a, b, c, \ldots, h$ пробегают значения от 0 до 3, индексы $i, k, \ldots$ — от 1 до 3). Сплошная среда выделяет сопутствующую систему отсчета, с помощью которой могут быть как введены собственные характеристики среды, так и проведено пространственно-временное расщепление всех исследуемых тензоров. Последнее осуществляется [3] с помощью 4-скорости среды $u^a\,(u^a u_a=-1)$ и оператора $P^a_b\equiv\delta^a_b+u^a u_b$, проектирующего в собственное пространство среды. Величины, спроектированные с помощью P^a_b, отмечаем символом $(\ldots)_\perp$, например, $(s^a)_\perp\equiv P^a_b\,s^b$. Среди кинематических характеристик среды отметим 4-ускорение $a^b\equiv Du^b$, где $D\equiv u^b\nabla_b$ — оператор абсолютной производной по собственному времени, а ∇_b — оператор ковариантной производной, а также $e_{ab}\equiv(\nabla_b u_a)_\perp$ — релятивистский пространственный градиент скорости. Из e_{ab} могут быть получены тензор скорости деформации $d_{ab}\equiv e_{(ab)}$ и тензор угловой скорости $\omega_{ab}\equiv e_{[ab]}$ (пространственно-спроектированные).

Исходным соотношением общерелятивистской теории сплошных сред служит неравенство Клаузиуса — Дюгема (напр., [3, 4]):

$$-\rho\,(D\Psi+\eta D\Theta)+{}_Et^{ba}e_{ab}-P^a DE_a-M_a DB^a-\Theta^{-1}\dot{\Theta}_a Q^a+{}_Dt^{ba}e_{ab}+g^aE_a\geqslant 0, \qquad (1)$$

где ρ — собственная плотность массы; Ψ — термодинамический потенциал — свободная энергия единицы массы; η — энтропия единицы собственной массы; Θ — собственная температура; ${}_Et^{ba}$ — тензор упругих напряжений; ${}_Dt^{ba}$ — тензор вязких напряжений; P^a, M^a — 4-векторы поляризации и намагничения; E_a и B^a — силовые векторы электрического и магнитного полей; g^a — плотность тока проводимости; Q^a — вектор плотности потока тепла и $\overset{*}{\Theta}_a$ — релятивистский градиент температуры. Все величины в (1) подвергнуты 3+1-расщеплению.

Эффекты, связанные с вязкостью жидкости, содержатся в слагаемом ${}_Dt^{ba}e_{ab}$, причем в пренебрежении квантовыми эффектами [5] тензор вязких напряжений симметричен, т. е. ${}_Dt^{ba} = {}_Dt^{ab}$. Следовательно, в (1) входит d_{ab} вместо e_{ab}. Вязкий тензор напряжений (термодинамический поток) может быть выражен через тензор скорости деформации (термодинамическую силу) посредством соотношения

$$ {}_Dt^{ba} = d^{baef}d_{ef}, \quad d^{baef} = d^{abef} = d^{bafe} \tag{2} $$

с помощью материального параметра — пространственного тензора d^{baef}, специфического для каждой жидкости и учитывающего ее вязкость. Зависимость d^{baef} от электрического поля и приводит к электрореологическому эффекту.

В отсутствие гравитационного поля тензор d^{baef} для жидкостей может быть построен только из скаляров и единичного пространственного тензора P^{ab}, а именно, в виде [6]:

$$ d^{baef} = k_1 P^{(b|e|}P^{a)f} + k_2 P^{ba}P^{ef}. \tag{3} $$

Подстановка (3) в (2) показывает, что второе слагаемое в (3) учитывает деформацию всестороннего сжатия, т. е. k_2 соответствует второй вязкости, которая в дальнейшем рассматриваться не будет. В свою очередь, скалярный коэффициент вязкости k_1 для электрореологических жидкостей должен зависеть от напряженности электрического поля E_a. Из соображений тензорной размерности и изотропии жидкости в отсутствие гравитационного поля очевидно, что k_1 может быть функцией только от скаляров, образованных из E_a и P^a_b. Если внешнее электрическое поле слабое, то главным является скаляр $E^2 \equiv P^{ab}E_aE_b$, т. е. $k_1 = k_1(P^{ab}E_aE_b)$. Разлагая k_1 в ряд по E^2 и ограничиваясь первым существенным членом, находим:

$$ k_1 = a_0 + a_1 P^{cd}E_cE_d, \tag{4} $$

скалярные коэффициенты a_0, a_1 зависят от плотности и температуры.

В соответствии с [1], при движении среды в гравитационном поле ее материальные параметры изменяются определенным образом, описываемым так называемым законом эволюции (ЗЭ). В дальнейшем ЗЭ для материального параметра d^{baef} постулируется в виде:

$$ (\underset{R}{L} d^{baef})_\perp = 0, \tag{5} $$

где $\underset{R}{L}$ — дифференциальный оператор специального вида [2]:

$$ (\underset{R}{L} A^{\cdot a \cdot}_{\cdot b \cdot})_\perp \equiv (DA^{\cdot a \cdot}_{\cdot b \cdot})_\perp - \omega^a_c A^{\cdot c \cdot}_{\cdot b \cdot} + \omega^c_b A^{\cdot a \cdot}_{\cdot c \cdot} - \underset{R}{d^a_c} A^{\cdot c \cdot}_{\cdot b \cdot} + \underset{R}{d^c_b} A^{\cdot a \cdot}_{\cdot c \cdot}, \tag{6} $$

а $\underset{R}{d^c_b}$ обозначает релятивистскую часть тензора деформации. Закон эволюции (5) позволяет учесть прямое влияние релятивистской деформации среды и гравитационного поля на вязкие свойства жидкости. Решая при заданном движении среды уравнение (5), можно получить значения d^{baef} в любой точке среды в любой момент времени, если они известны на некоторой начальной пространственно-подобной гиперповерхности H. Для определенности положим, что H является пространственной гиперплоскостью вне гравитационного поля.

В соответствии с [2], тензор d^{baef} должен быть построен только из скаляров и вспомогательного тензора $C^{ab} = C^{ba}$, обладающего следующими свойствами:

$$ (\underset{R}{L} C^{ab})_\perp = 0, \quad C^{ab}|_H = P^{ab}. \tag{7} $$

Решение ЗЭ (5) сводится тогда просто к замене P^{ab} на C^{ab} в соотношениях для материальных параметров жидкости, находящейся вне гравитационного поля. Сопоставление (3), (4) и (7) дает для искомого материального параметра следующее выражение:

$$d^{bacd} = \frac{\rho}{\rho_0}\,[a_2 + a_3\,C^{ef}\,E_e E_f]\;C^{(b|\,c\,|}C^{a)\,d}, \tag{8}$$

а значения постоянных ρ_0, a_2 и a_3 заданы на H. Коэффициент

$$\frac{\rho}{\rho_0}\,a_3\,C^{ef}\,E_e\,E_f \tag{9}$$

определяет искомый ЭРЭ. Для оценки влияния гравитационного поля на ЭРЭ необходимо вычислить разницу между (9) и соответствующим выражением вне гравитационного поля, т. е. $a_3 P^{ef} E_e E_f$.

Выражение (9) включает две части:

1) изотропное изменение ЭРЭ вследствие отличия ρ от ρ_0,

2) анизотропное изменение ЭРЭ вследствие отличия C^{ab} от P^{ab}.

Для того чтобы избежать координатных эффектов, сопоставление обоих выражений должно проводиться в некоторой подходящей системе тетрад.

2. **Предварительные соотношения для поля Шварцшильда.**

Применим полученные результаты к жидкости, которая покоится в системе отсчета (напр., на спутнике), вращающейся в поле Шварцшильда по круговой орбите. Предполагая, что спутник движется по геодезической, найдем тетрадные компоненты тензора C^{ab} и собственную плотность массы ρ.

Поле Шварцшильда задается линейным элементом

$$ds^2 = -(1-2M/R)\,dt^2 + dR^2/(1-2MR) + R^2\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,d\varphi^2), \tag{10}$$

где M — масса тяготеющего центра. Перейдем к вращающейся координатной системе с помощью преобразования $\varphi = \omega t + \varkappa$, где ω обозначает угловую скорость. Тогда (10) примет вид:

$$ds^2 = [-(1-2M/R) + R^2\omega^2\sin^2\Theta]\,dt^2 + dR^2/(1-2M/R) + R^2\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,d\varkappa^2) + 2R^2\omega\sin^2\Theta\,dt\,d\varkappa. \tag{11}$$

4-скорость среды, покоящейся в системе (11), имеет компоненты

$$u_a = (-[(1-2M/R) - R^2\omega^2\sin^2\Theta]^{1/2};\ 0;\ 0;\ 2R^2\omega\sin^2\Theta\,[1-2M/R - R^2\,\omega^2\sin^2\Theta]^{-1/2}).$$

Отличны от нуля следующие компоненты проектирующего оператора P^a_b:

$$P_{11} = (1-2M/R)^{-1},\ P_{22} = R^2,\ P_{03} = -2R^2\,\omega\sin^2\Theta,$$

$$P_{33} = \frac{4R^4\omega^2\sin^4\Theta}{1-2M/R - R^2\omega^2\sin^2\Theta} + R^2\sin^2\Theta. \tag{12}$$

Чтобы найти тензор C_{ab}, «выключим» [7] гравитационное поле, устремляя M к нулю, т. е. $C_{ab} = \lim\limits_{M\to 0} P_{ab}$. Различие между C_{ab} и P_{ab} обязано только релятивистской деформации, а тензор C_{ab} должен быть решением уравнения (5) с начальным условием (7) (см. [2]). Тогда

$$C_{11} = 1,\ C_{22} = R^2,\ C_{03} = -2R^2\omega\sin^2\Theta,\ \ C_{33} = R^2\sin^2\Theta\,\frac{1+3R^2\,\omega^2\sin^4\Theta}{1-R^2\omega^2\sin^2\Theta}.$$

Для вычисления тетрадных компонент тензора C_{ab} введем натуральные тетрады $L^a_{(b)}$. Полагая $L^a_{(0)} \equiv u^a$, получим после выкладок:

$$L^a_{(1)} = (0,\ (1-2M/R)^{1/2},\ 0,\ 0,),\ \ L^a_{(2)} = (0,\ 0,\ 1/R,\ 0),$$

$$L^a_{(3)} = \left(\frac{-2\omega}{1-2M/R+3R^2\omega^2\sin^2\Theta}\left[\frac{4R^4\,\omega^2\sin^4\Theta}{1-2M/R - R^2\,\omega^2\sin^2\Theta} + R^2\sin^2\Theta\right]^{1/2},\ 0,\ 0,\right.$$

$$\left.\frac{1-2M/R - R^2\omega^2\sin^2\Theta}{R^2\sin^2\Theta\,[1-2M/R+3R^2\,\omega^2\sin^2\Theta]}\left[\frac{4R^4\omega^2\sin^4\Theta}{1-2M/R - R^2\omega^2\sin^2\Theta} + R^2\sin^2\Theta\right]^{1/2}\right).$$

Тогда тетрадные компоненты C_{ab} суть:

$$C_{(1)(1)} = 1 - 2M/R, \; C_{(2)(2)} = 1,$$

$$C_{(3)(3)} = \frac{(1 - 2M/R - R^2\omega^2 \sin^2 \Theta)\,(1 + 3\omega^2 R^2 \sin^2 \Theta)}{(1 - 2M/R + 3R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta)\,(1 - \omega^2 R^2 \sin^2 \Theta)}. \tag{14}$$

Используя сферическую симметрию поля Шварцшильда, положим $\Theta = \pi/2$. Тогда (14) упрощается до

$$C_{(3)(3)} = \frac{(1 - 2M/R - R^2\omega^2)\,(1 + 3R^2\omega^2)}{(1 - 2M/R + 3R^2\omega^2)\,(1 - R^2\omega^2)}. \tag{15}$$

Поскольку изучаемая система движется по круговой орбите, то существует соотношение, связывающее ее угловую скорость ω с радиусом орбиты R. Это соотношение может быть найдено из уравнения геодезической $a^b \equiv Du^b = 0$.

Вычисляя скобки Кристоффеля и находя абсолютную производную от 4-скорости, получаем для 4-ускорения

$$a^b = \left(0, \; \frac{(1 - 2M/R)\,(2R\omega^2 \sin \Theta - 2M/R^2)}{1 - 2M/R - R^2\omega^2 \sin^2 \Theta}, \; \frac{\omega^2 \sin 2\Theta}{1 - 2M/R - R^2\omega^2 \sin^2 \Theta}, \; 0\right).$$

Подставляя снова $\Theta = \pi/2$ и приравнивая a^b к нулю, приходим к соотношению $2R\omega^2 - 2M/R^2 = 0$, откуда

$$\omega R = (M/R)^{1/2}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), находим

$$C_{(3)(3)} = [1 - (3M/R)^2]/[1 - (M/R)^2]. \tag{17}$$

Используя [4], для собственной плотности массы находим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = [\det C_{(i)(k)}\,]^{-1/2} = 1 + 2M/R + 0(2M/R), \tag{18}$$

где $0(2M/R)$ обозначает члены более высокого порядка по $2M/R$, чем линейный.

3. **Обсуждение примеров.**

Вернемся к соотношению (9), которое в тетрадных компонентах имеет вид:

$$\frac{\rho}{\rho_0}\, a_3\, C^{(i)(k)}\, E_{(i)}\, E_{(k)}. \tag{19}$$

Изотропный эффект. Из (18) непосредственно видно, что изотропный вклад имеет порядок $2M/R$. Следовательно, гравитационное поле усиливает ЭРЭ.

Анизотропный эффект. При рассмотрении анизотропного вклада, вызванного отличием $C^{(i)(k)}$ от $P^{(i)(k)}$, представляют интерес 3 возможных ориентации электрического поля:

а) радиальное направление (к центру поля Шварцшильда). Поскольку $C^{(1)(1)} = 1 - 2M/R$, то ЭРЭ ослабляется. Изотропный и анизотропный эффекты компенсируют друг друга в первом порядке по $2M/R$.

б) направление движения. Формула (17) показывает, что $C^{(3)(3)}$ дает эффект только 2-го порядка. Следовательно, остается изотропный вклад.

в) поперечное направление. Если электрическое поле перпендикулярно как радиусу, так и направлению движения, то никакого анизотропного вклада не появляется даже в более высоких порядках.

Таким образом, ЭРЭ увеличивается в первом порядке относительно главного члена, если электрическое поле перпендикулярно к радиальному направлению.

Оценим порядок поправочного члена $2M/R$ для различных небесных тел.

Пример 1. Искусственный спутник Земли. Обычная орбита спутника лежит примерно на высоте 300 км от поверхности Земли. Тогда $R = 6{,}7 \cdot 10^3$ км от поверхности Земли и поскольку для Земли [8] $2M_3 = 0{,}8876$ см, то $2M/R = 1{,}32 \cdot 10^{-9}$. Столь малая величина не позволяет обнаружить его современными средствами.

Пример 2. Пусть космический корабль движется по круговой орбите вокруг Солнца в пределах орбиты Меркурия. Тогда $R = 57{,}9 \cdot 10^6$ км, $2M_C = 2{,}9533 \cdot 10^5$ см, $2M/R = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$. Такой эффект все еще достаточно мал, чтобы повлиять, например, на работу технических конструкций, но уже может быть измерен с помощью высокочувствительной аппаратуры.

Отметим в заключение, что полученные выводы являются следствием выбранного закона эволюции (5) для материального параметра d^{baej} (т. е. выбранной модели среды) и могут не иметь места для другого закона эволюции, например, для ЗЭ вида $(Dd^{baej})_{\perp} = 0$.

Список литературы

1. Polozov M. N., Schäbe H. // Exp. Techn. Phys. 1984. V. 32. P. 387.
2. Ibid. 1987. V. 35. P. 161.
3. Maugin G. A. // Journ. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1198.
4. Schäbe H. // Exp. Techn. Phys. 1985. V. 33. P. 217.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986.
7. Saliè N. // Wiss. Zs. FSU Jena, math.-nat. Reihe. 1976. V. 25. P. 439.
8. Stephani H. Allgemeine Relativitätsttheorie. Berlin, 1977.

Поступила в редакцию 15.10.91.

УДК 621.315.592:546.28

А. И. УРБАНОВИЧ, А. П. НОВИКОВ, НГУЕН ВАН КОНГ (СРВ)

ТЕРМОУПРУГАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ

В настоящее время в литературе, посвященной вопросам ионно-лучевой обработки материалов широко обсуждается проблема «дальнодействия». Суть ее заключается в регистрации изменений дефектно-примесной системы кристалла на расстояниях, в сотни и тысячи раз превышающих средний проективный пробег внедренных ионов. В качестве одной из причин может рассматриваться генерация акустических волн заряженными частицами. Следует заметить, что в настоящее время отсутствует последовательная теоретическая модель возникновения акустических волн, учитывающая поперечные размеры трека и особенности термализации выделяемой в кристалле энергии.

В работе [1] рассмотрено возбуждение акустических колебаний пучками заряженных частиц малой плотности и проведен расчет акустического сигнала от перегретой области вблизи трека заряженной частицы в предположении, что трек представляет собой бесконечно тонкую нить, вдоль которой происходит непрерывное выделение энергии с постоянной интенсивностью. Такая модель применима для сфокусированных ионных пучков или даже для отдельных частиц при условии, что скорость передачи энергии, выделенной в треке в приграничную область, постоянна. Естественно, представляет интерес выйти за рамки этих приближений и учесть как поперечный размер трека, так и временную зависимость мощности энерговыделения.

Рассмотрим прохождение заряженной частицы через тонкую пластину вещества толщиной $h \leqslant h_p$, где h_p — радиационная длина вещества мишени. В этом случае трек можно представить в виде цилиндра, радиусом R^0, в котором происходит выделение энергии с мощностью $S(t)h$, где $S(t)$ — мощность, приходящаяся на единицу длины. Будем также считать, что величина S экспоненциально зависит от времени t и проведем расчет акустического сигнала от перегретой области для коротких промежутков времени, следующих за моментом прохождения частицы. В этих условиях