

АФФИНОРНАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И ТЕОРИЯ СЕТЕЙ

1. Рассмотрим пару $(G_1\Phi)$, где $G_1 = GL(2, \mathbf{R})$, а Φ — классический автоморфизм группы Ли G_1 , определенный равенством $\Phi(a) = (a^{-1})'$. Тогда определится область симметрии (см. [1])

$$S(\Phi) = \{x \in G_1 \mid x\Phi(x) = e\} = \{x \in G_1 \mid x' = x\} = \left\{x = \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 + x_2 \end{pmatrix}\right\},$$

в которой группа Ли G_1 действует по общему правилу

$$x \rightarrow T_a(x) = ax\Phi(a^{-1}) = axa', \quad a \in G_1.$$

Относительно действия группы Ли G_1 область симметрии разбивается на системы импримитивности, которые определяются уравнениями второго порядка

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = c.$$

Ограничивая действие группы G_1 до действия подгруппы $G = SL(2, \mathbf{R})$, получим разбиение $S(\Phi)$ на G -орбиты, каждая из которых изоморфна одной из орбит:

$$\Lambda_2 = \{x = aa' \mid a \in G\} = \left\{x = \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 + x_2 \end{pmatrix} \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1\right\}$$

или

$$J_2 = \left\{y = \begin{pmatrix} y_0 - y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 + y_2 \end{pmatrix} \mid y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 = -1\right\},$$

где, как известно, Λ_2 есть плоскость Лобачевского.

Для того чтобы определить геометрический смысл элементов $y \in J_2$, используем, согласно общему правилу, инвариант $J = \frac{1}{2} sp(y^{-1}x)$ и морфизм σ , т. е. отображение $\sigma: J_2 \rightarrow P(\Lambda_2): y \rightarrow M_y = \left\{x \in \Lambda_2 \mid \frac{1}{2} sp(y^{-1}x) = 0\right\}$.

Так как легко подсчитать

$$J = \frac{1}{2} sp(y^{-1}x) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2, \quad (1)$$

то $J=0$ — уравнение прямой плоскости Лобачевского. Отсюда следует, что J_2 является G -пространством прямых плоскости Лобачевского J_2 .

Теорема. Инвариант $|J(x, y)|$ равен: 1) $ch[d(x, y)]$, если $x, y \in \Lambda_2$, а $d(x, y)$ — расстояние между точками x и y ; 2) $\cos(x, y)$, если пересекающиеся прямые и 3) определяет расстояние между точкой $x \in \Lambda_2$ и прямой $y \in J_2$.

Доказательство: 1) Следует из равенства (1), которое совпадает с известной формулой для $ch[d(x, y)]$ на плоскости Лобачевского, 2) рассматривая прямые с точностью до неевклидовых движений, при которых угол между прямыми не изменяется, рассмотрим тот случай, когда прямые пересекаются в точке $(0, x_1, x_2)$. В этом случае неевклидовы и евклидовы углы совпадают, и по формуле (1) получаем:

$$\frac{1}{2} sp(y^{-1}, x) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos \varphi,$$

где φ — угол между прямыми. Теорема доказана.

2. **Аффинорная модель плоскости Лобачевского.** Исходим из легко проверяемого равенства:

$$a' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} a^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}, \quad a \in G.$$

Получаем: если $x \in \Lambda_2$, то

$$x = aa' = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} a^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

И, следовательно, отображение $x \rightarrow x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ есть изоморфизм плоскости Лобачевского в G -пространство

$$M = \left\{ z = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} a^{-1} \mid a \in G \right\},$$

в котором структура G -пространства определяется отображением

$$(a, x) \rightarrow T_a(x) = axa^{-1}. \quad (2)$$

Совершенно аналогично G -пространство J_2 изоморфно G -пространству

$$N = \left\{ w = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a^{-1} \mid a \in G \right\},$$

в котором G действует по такому же закону, что и в M .

Так как закон преобразования (2) является законом преобразования аффинора линейного пространства V_2 , то полученные однородные G -пространства будем называть аффинорной моделью геометрии Лобачевского.

Для аффиноров, естественно, вводится инвариант $H = \frac{1}{2} sp(zw)$, который с точностью до знака совпадает с инвариантом $J(x, y)$, ибо

$$xy^{-1} = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = zw^{-1}.$$

Для $z(w)$ выполняются условия $z^2 = -E$, $w^2 = E$ и поэтому $z^{-1} = -z$, $w^{-1} = w$. Здесь z, w могут принадлежать однородным пространствам M или N . Отсюда следует, что $H = 0$ эквивалентно ортогональности прямых или принадлежности точки прямой, или совпадению двух точек.

3. Как известно [2], задание сети на двумерном многообразии X_2 эквивалентно заданию аффинора с нулевым следом, удовлетворяющего условию $z^2 = \pm Id$.

В случае $z^2 = Id$ сеть называется гиперболической, а в случае $z^2 = -Id$ — эллиптической. Используя аффинорную модель плоскости Лобачевского, можем утверждать, что задание эллиптической сети эквивалентно заданию в каждой точке X_2 аффинора z_p , т. е. заданию в каждой точке $p \in X_2$ точки пространства Лобачевского. Аналогично задание гиперболической сети эквивалентно заданию в каждой точке X_2 прямой плоскости Лобачевского.

Для двух сетей, определенных аффинорами z и w , находится (см. [2]) совместный инвариант двух сетей $H = \frac{1}{2} sp(zw)$. В каждой точке $p \in X_2$ значение H_p совпадает с введенным ранее инвариантом для двух точек или прямых плоскости Лобачевского.

Сети называются аполярными, если их совместный инвариант H обращается в нуль. Для соответствующих точек это означает, что две точки совпадают, что точка и прямая принадлежат друг другу или, что две прямые ортогональны.

Используя этот факт, легко доказываются теоремы.

Теорема 1. Среди трех взаимно аполярных сетей две сети гиперболические и одна эллиптическая,

Доказательство следует из того, что аполярные сети всегда не совпадающие, а две аполярные эллиптические сети определяют совпадающие точки, что невозможно. Три гиперболические сети также невозможны, так как невозможны на плоскости Λ_2 три ортогональные прямые.

Теорема 2. Существует тройка взаимно аполярных сетей.

Доказательство: В данной точке $p \in X_2$ для построения трех аполярных сетей достаточно взять две ортогональные прямые плоскости Лобачевского, которые определяют общую точку. Соответственно определяются в каждой точке три аполярных аффинора, которые и определяют сеть в X_2 . Аналитическое описание этого построения позволяет строить гладкие поля аффиноров, которые и определяют нужные нам сети. Конечно, всё рассуждение проводится локально.

Список литературы

1. Ведерников В. И., Ведерников С. В. Области симметрических пространств, порожденных группой $SL(2, C)$ // Тез. докл. Всесоюз. конф. по неевклидовой геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976.
2. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.

Поступила в редакцию 04.10.90.

УДК 519.24

МОХАМЕД ГХАЗАЛ (ЕГИПЕТ), Н. Н. ТРУШ

ОДНО НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ОКОН ПРОСМОТРА ДАННЫХ

Исследованию свойств окон просмотра данных посвящены работы [1], [2]. Приведем еще одно свойство, находящее применение при исследовании оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов.

Теорема. Пусть функции $h_\alpha(t)$, $-\infty < t < \infty$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$, ограничены постоянной M , имеют ограниченную постоянной L вариацию и обращаются в нуль при $|t| \geq 1$, а функция

$$H_{a_1 \dots a_k}^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} \left[\prod_{j=1}^k h_{a_j} \left(\frac{t}{T} \right) \right] \exp \{ -i\lambda t \},$$

$$-\pi < \lambda < \pi, a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r,$$

тогда $|H_{a_1 \dots a_k}^{(T)}(\lambda)| \leq \frac{M^{k-1} L k}{\left| \sin \frac{\lambda}{2} \right|}$, если $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Абеля

$$\sum_{t=0}^{T-1} u_t v_t = \sum_{t=0}^{T-2} U_t (v_t - v_{t+1}) - U_{-1} v_0 + U_{T-1} v_{T-1},$$

где

$$U_t = \sum_{m=0}^t u_m = \sum_{m=0}^t e^{-i\lambda m}, \quad U_{-1} = 0,$$

и по предположению $v_t = \prod_{j=1}^k h_{a_j} \left(\frac{t}{T} \right)$.

Тогда имеем

$$H_{a_1 \dots a_k}^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-2} \left\{ \sum_{m=0}^t e^{-i\lambda m} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^k h_{a_j} \left(\frac{t}{T} \right) - \prod_{j=1}^k h_{a_j} \left(\frac{t+1}{T} \right) \right\} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{T-1} e^{-i\lambda m} \prod_{j=1}^k h_{a_j} \left(\frac{T-1}{T} \right).$$