множество систем (*) с интегральной разделенностью [10] открыто [4] и всюду плотно [11] в M_n. Легко показывается, что всякая система (*) с интегральной разделенностью имеет ровно n различных равномерных нижних показателей (это же справедливо для характеристических, нижних и равномерных верхних показателей).

Список литературы

1. Богданов Ю. С. // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. 1961. Т. 2. Л., 1964. С. 424.
2. Богданов Ю. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1969. № 1. С. 10.
3. Bohl P. // Journ. reine und angew. Math. № 144. S. 284.
4. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
5. Былов Б. Ф. // Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4. № 6. С. 1241.
6. Миллионщиков В. М. // Матем. сб. 1968. Т. 75. № 1. С. 140.
7. Изобов Н. А. // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М., 1974. Т. 12. С. 71.
8. Изобов Н. А. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469.
9. Барабанов Е. А. // Докл. АН БССР. 1962. Т. 26. № 12. С. 1069.
10. Былов Б. Ф. // Матем. сб. 1965. Т. 67. № 3. С. 338.
11. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1167.

Поступила в редакцию 05.02.91.

УДК 517.925.6

В. И. МАТАТОВ, Л. В. САБЫНИЧ

К ВОПРОСУ О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial}{\partial y} H(x, y), \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, y), \tag{1}$$

где $H(x, y)$ — полином относительно x, y с постоянными комплексными коэффициентами, $z \in \mathbf{C}$, $x \in \widehat{\mathbf{C}}$, $y \in \widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, $(H'_x, H'_y) = 1$.

Предположим, что гамильтониан имеет вид:

$$H(x, y) = \alpha_n y^n + \ldots + \alpha_3 y^3 + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) y^2 + (\gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0) y + \\ + \delta_k x^k + \ldots + \delta_1 x + C, \tag{2}$$

где $\alpha_n, \ldots, \delta_1, C$ — постоянные, $\alpha_n \neq 0$, $\delta_k \neq 0$.

В [1] рассматривались случаи, когда одна из компонент решения системы стремится к бесконечности, а другая — к конечному числу. В настоящей работе это ограничение снимается.

Рассмотрим систему (1) с гамильтонианом (2) при $\kappa=2$. Итак, дана следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = n\alpha_n y^{n-1} + \ldots + 3\alpha_3 y^2 + 2(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) y + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0, & (3.1) \\ y' = -(2\beta_2 x + \beta_1) y^2 - (2\gamma_2 x + \gamma_1) y - 2\delta_2 x - \delta_1. & (3.2) \end{cases}$$

Так как из второго уравнения системы функция $x(z)$ выражается рациональным образом через y и y', то данная система приводится к одному уравнению второго порядка вида:

$$y'' = R(y, y'), \tag{4}$$

где R — рациональная функция относительно y и y'.

Действительно, дифференцируя (3.2) по z, будем иметь

$$y'' = -2\beta_2 y^2 x' - 2(2\beta_2 x + \beta_1) y y' - 2\gamma_2 y x' - (2\gamma_2 x + \gamma_1) y' - 2\delta_2 x'.$$

Подставляя в полученное выражение x' из (3.1), а затем исключая x, рационально выраженное из (3.2)

$$x = -\frac{y' + \beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1}{2(\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2)} = R_1(y, y'), \tag{5}$$

получим следующее уравнение:

$$y'' = \frac{2\beta_2 y + \gamma_2}{2(\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2)} y'^2 - \frac{(2\beta_2 y + \gamma_2)(\beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1)^2}{2(\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2)} + $$
$$+ (2\beta_1 y + \gamma_1)(\beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1) - 2(\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2)(n\alpha_n y^{n-1} + \ldots +$$
$$+ 3\alpha_3 y^2 + 2\beta_0 y + \gamma_0). \tag{6}$$

Приложение метода Пенлеве [2] к уравнениям вида (4) дает необходимые условия однозначности подвижных особых точек этих уравнений. Так, полюсы функций $A_1(y)$, $A_2(y)$ должны быть простыми и совпадать с полюсами $A_0(y)$ ($A_0(y)$ — коэффициент в уравнении (6) при y'^2, $A_1(y)$ — при y', $A_2(y)$ — при y'^0). Поэтому $\Delta_1 = \gamma_2^2 - 4\beta_2\delta_2 \neq 0$. Целая часть $A_1(y)$ относительно y должна быть не выше первой степени, а целая часть $A_2(y)$ — не выше третьей. Следовательно, если решения $y(z)$ уравнения (6) имеют только однозначные подвижные особенности, то при $\beta_2 \neq 0$ необходимо выполнение неравенства $n \leqslant 2$.

Докажем, что эти условия являются достаточными. С учетом полученных необходимых условий имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = 2(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) y + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0, \\ \dfrac{dy}{dz} = -(2\beta_2 x + \beta_1) y^2 - (2\gamma_2 x + \gamma_1) y - 2\delta_2 x - \delta_1, \end{cases} \tag{7}$$

где $\Delta_1 = \gamma_2^2 - 4\beta_2\delta_2 \neq 0$. Используем методику работы [1]. Составляя систему из частного интеграла (7) и ее второго уравнения, получим

$$\begin{cases} (\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2) x^2 + (\beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1) x + \beta_0 y^2 + \gamma_0 y - C_0 = 0, \\ 2(\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2) x + \beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1 + y' = 0. \end{cases}$$

Исключая из полученной системы переменную x, имеем уравнение

$$y'^2 - (\beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1)^2 + 4(\beta_2 y^2 + \gamma_2 y + \delta_2)(\beta_0 y^2 + \gamma_0 y - C_0) = 0. \tag{8}$$

Для него выполняются все условия теоремы Фукса [2], а значит, решения $y(z)$ имеют только однозначные подвижные особенности. То же самое верно и для $x(z)$-рациональной функции относительно y, y' (5).

Итак, система с гамильтонианом

$$H(x, y) = (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) y^2 + (\gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0) y + \delta_2 x^2 + \delta_1 x,$$
$$\Delta_1 = \gamma_2^2 - 4\beta_2\delta_2 \neq 0$$

является системой Р-типа.

Если в (6) $\beta_2 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, то для того, чтобы это уравнение имело только однозначные подвижные особенности, необходимо выполнение условия $n \leqslant 3$. При $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ аналогичное необходимое условие таково: $n \leqslant 4$. Соответствующие системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = 3\alpha_3 y^2 + 2(\beta_1 x + \beta_0) y + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0, \\ \dfrac{dy}{dz} = -\beta_1 y^2 - (2\gamma_2 x + \gamma_1) y - 2\delta_2 x - \delta_1 \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = 4\alpha_4 y^3 + 3\alpha_3 y^2 + 2(\beta_1 x + \beta_0) y + \gamma_1 x + \gamma_0, \\ \dfrac{dy}{dz} = -\beta_1 y^2 - \gamma_1 y - 2\delta_2 x - \delta_1. \end{cases} \tag{10}$$

Понижая порядок этих систем с помощью соответствующих интегралов, получим уравнения, для которых выполняются условия теоремы Фукса. Таким образом, (9) и (10) — системы Р-типа.

Аналогичным образом исследуется система (1) с гамильтонианом, степень которого по y равна двум:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} 2(\beta_2x^2+\beta_1x\ \beta_0)y+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0, \\ \frac{dy}{dz}=-(2\beta_2x+\beta_1)y^2-(2\gamma_2x+\gamma_1)-k\delta_kx^{k-1}-\ldots-2\delta_2x-\delta_1. \end{cases} \quad (11)$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы по z и исключая из данной системы переменную y, получим уравнение

$$x''=\frac{2\beta_2x+\beta_1}{2(\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0)}x'^2-\frac{(2\beta_2x+\beta_1)(\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0)^2}{2(\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0)}+$$
$$+(\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0)(2\gamma_2x+\gamma_1)-2(\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0)(k\delta_k x^{k-1}+\ldots+\delta_1).$$

Приложение метода Пенлеве к данному уравнению дает следующие необходимые условия однозначности подвижных особых точек: $k\leqslant 2$, $\Delta_2=\beta_1^2-4\beta_2\beta_0\neq 0$. Если $\beta_2=0$, то $k\leqslant 3$; если же $\beta_2=\beta_1=0$, то $k\leqslant 4$. Эти условия являются и достаточными, что доказывается с помощью теоремы Фукса. Так как из первого уравнения системы (11)

$$y=\frac{x'-\gamma_2x^2-\gamma_1x-\gamma_0}{2(\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0)},$$

т. е. y является рациональной функцией по x, x', то и вторая компонента решения имеет только однозначные подвижные особенности.

Итак, справедлива

Теорема. Системы Гамильтона (1), для которых выполняется условие $(H'_x(x, y), H'_y(x, y))=1$ и гамильтониан принимает один из нижеследующих видов:

1) $H(x, y)=(\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0)y^2+(\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0)y+\delta_2x^2+\delta_1x$,

$\Delta_1=\gamma_2^2-4\beta_2\delta_2\neq 0$;

2) $H(x, y)=\alpha_3y^3+(\beta_1x+\beta_0)y^2+(\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0)y+\delta_2x^2+\delta_1x$;

3) $H(x, y)=\alpha_4y^4+\alpha_3y^3+(\beta_1x+\beta_0)y^2+(\gamma_1x+\gamma_0)y+\delta_2x^2+\delta_1x$;

4) $H(x, y)=(\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0)y^2+(\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0)y+\delta_2x^2+\delta_1x$,

$\Delta_2=\beta_1^2-4\beta_2\beta_0\neq 0$;

5) $H(x, y)=(\beta_1x+\beta_0)y^2+(\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0)y+\delta_3x^3+\delta_2x^2+\delta_1x$;

6) $H(x, y)=\beta_0y^2+(\gamma_2x^2+\gamma_1x+x_0)y+\delta_4x^4+\delta_3x^3+\delta_2x^2+\delta_1x$,

имеют в конечной части плоскости z только однозначные подвижные особые точки.

Список литературы

1. Мататов В. И., Филиппович С. Н. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 2016.

2. Голубев В. Б. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.

Поступила в редакцию 19.09.90.

УДК 517.925

Р. КАРРУМ (САР)

О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОЖИТЕЛЕЙ КЛИФФОРДА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \quad (1)$$

где функции P и Q непрерывны в некоторой односвязной области D фазовой плоскости XOY.