Математика и механика

УДК 517.977

С. ТАГАЙНАЗАРОВ

ОПОРНЫЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Математическая модель. Пусть заданы: 1) динамическая система управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \; x(0) = x_0,$$
$$(x = (x_j, \; j \in J) \in R^n, \; J\,\{1, \; \dots \;, n\}, \; u \in R); \tag{1}$$

2) класс доступных управлений, состоящий из кусочно-постоянных функций $u(t)$, $t \in T = [0, \; t^*]$, стесненных ограничением $|u(t)| \leqslant 1$, $t \in T$; 3) терминальное множество в пространстве состояний

$$\begin{gathered} X^* = \{x \in R^n\colon \; b_* \leqslant Hx \leqslant b^*\}, \\ (H = H(I, \; J) \in R^{m \times n}, \; I = \{1, \; \dots \;, m\}); \end{gathered} \tag{2}$$

4) многогранный шар S_ρ радиуса ρ

$$S_\rho = \{x\colon \; x = Dy, \; y \in Y_\rho = \{y\colon \; \rho f_* \leqslant y \leqslant \rho f^*\}\},$$
$$(D = D(J, \; K), \; K = \{1, \; \dots \; k\}, \; \rho \in R_+, \; f_* \leqslant 0 \leqslant f^*).$$

Множество

$$X_\rho = \{x\colon \; x = x^1 + x^2, \; x^1 \in X^*, \; x^2 \in S_\rho\}$$

назовем ρ-окрестностью множества X^*.

Предположим, что множество достижимости $Q(t^*) = \{x : x = x(t^* | x_0, u(\cdot)), \; |u(t)| \leqslant 1, \; t \in T\}$ принадлежит конечной окрестности множества (2): $Q(t^*) \subset X_\rho$, $\rho < \infty$.

Рассмотрим линейную задачу терминального управления, которая в геометрической формулировке звучит следующим образом: среди точек множества $Q(t^*)$ найти такую x^0, которая лежит в минимальной окрестности множества $X^* : x^0 \in Q(t^*) \cap X_{\rho^0}$, $Q(t^*) \cap X_\rho = \varnothing$ при $\rho < \rho^0$ (3).

В аналитической форме рассматриваемая задача имеет вид:

$$\begin{gathered} \rho \to \min, \; \dot{x} = Ax + bu, \; x(0) = x_0, \\ |u(t)| \leqslant 1, \; t \in T; \; b_* \leqslant H(x(t^*) - Dy) \leqslant b^*, \\ \rho f_* \leqslant y \leqslant \rho f^*. \end{gathered} \tag{4}$$

Задача (4) представляет специальную линейную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. В литературе такие терминальные задачи формулируются с помощью нелинейных критериев качества, т. е. всегда являются нелинейными. Простейшая из них называтся линейно-квадратичной задачей терминального управления:

$$c' x(t^*) + x'(t^*) Dx(t^*)/2 \to \min,$$
$$\dot{x} = Ax + bu, \; x_0 = x(0), \; |u(t)| \leqslant 1, \; t \in T; \; (D \geqslant 0).$$

В данной статье предлагается специальный метод решения линейной задачи терминального управления (4). При этом будем опираться на результаты работы [1].

Поскольку в задаче (4) нет терминальных ограничений, то любое доступное управление назовем допустимым управлением.

Минимальное число $\rho = \rho(u)$, при котором множество X_ρ содержит состояние $x(t^*)$, порожденное допустимым управлением $u(t)$, $t \in T$, назовем значением критерия качества задачи (4) на допустимом управлении $u(t)$, $t \in T$.

Определение 1. Допустимое управление $u^0(t)$, $t \in T$, будем называть оптимальным, если $\rho(u^0) = \rho^0 = \min \rho(u)$.

Определение 2. При заданном числе $\varepsilon \geqslant 0$ допустимое управление $u^\varepsilon(t)$, $t \in T$, называется ε-оптимальным (субоптимальным), если оно удовлетворяет неравенству

$$\rho(u^\varepsilon) \geqslant \rho^0 - \varepsilon.$$

Пусть $F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau)$, $t, \tau \in T$; $F(t)$, $t \in T$,— фундаментальная $n \times n$-матрица решений однородной части $\dot{x} = Ax$ системы (1) ($\dot{F} = AF$, $F(0) = E$).

С помощью формулы Коши задачу (4) запишем в эквивалентной функциональной форме:

$$\rho \to \min,$$

$$b_* \leqslant \int_0^{t_*} HF(t^*, t)\,bu(t)\,dt + HF(t^*, 0)\,x_0 - HDy \leqslant b^*, \ |u(t)| \leqslant 1, t \in T; \quad (5)$$

$$\rho f_* \leqslant y \leqslant \rho f^*.$$

2. Опора. Опорное управление. Пусть $I_{оп}$ — произвольное подмножество I. На отрезке T выберем конечное множество моментов $T_{оп} = \{t_j, \ j \in J_{оп}\}$, $t_j < t_{j+1}$, $|J_{оп}| \leqslant |I_{оп}|$. Введем множества $K_{оп} \subset K$, $K_* \subset K_{оп}$, $K^* \subset K_{оп}$. Количество элементов во введенных множествах подберем так, чтобы выполнялось равенство

$$|I_{оп}| + |K_*| + |K^*| = |J_{оп}| + |K_{оп}| + 1.$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \ K_* \cap K^* = \varnothing; \ 2) \ K_* \cap K^* = k_0, \ f_*(k_0) \neq f^*(k_0).$$

Сформируем множество

$$K_{(оп)} = \begin{cases} [K_{оп} \setminus (K_* \cup K^*)] \cup k_\rho, & \text{если } K_* \cap K^* = \varnothing; \\ K_{оп} \setminus (K_* \cup K^*), & \text{если } K_* \cap K^* = k_0, \ f_*(k_0) \neq f^*(k_0), \end{cases}$$

где K_ρ — дополнительный индекс, соответствующий переменной ρ: $y_{k_\rho} = \rho$.

Обозначим $M_{оп} = \{I_{оп}; T_{оп}, K_{(оп)}\}$,

$$h(I|t) = H(I, J)\,F(t^*, t)\,b, \ \overline{H}(I_{оп}, T_{оп}) = (h(I_{оп}|t), \ t \in T_{оп}),$$

$$HF(t^*)\,x_0 = \eta_0, \ HD = G,$$

$h_{(i)}$ — i-я строка матрицы H.

Построим матрицу

$$P_{оп} = P(M_{оп}) = P(I_{оп}; T_{оп}, K_{(оп)});$$

с блоками

$$P(I_{оп}; T_{оп}, [K_{оп} \setminus (K_* \cup K^*)]) = (\overline{H}(I_{оп}, T_{оп}) - G(I_{оп}, K_{оп} \setminus (K_* \cup K^*)),$$

$$P(I_{оп}, k_\rho) = -(G(I_{оп}, K_*)f_*(K_*) + G(I_{оп}, K^*)\,f^*(K^*)).$$

Определение 3. Совокупность $M_{оп}$ назовем опорой задачи (4), если не вырождена опорная матрица $P_{оп}$.

Будем называть $M_{оп}$: 1) опорой первого типа, если $K_* \cap K^* = \varnothing$, 2) опорой второго типа, если $K_* \cap K^* = k_0$, $f_*(k_0) \neq f^*(k_0)$.

Обозначим: $I_н = I \setminus I_{оп}$, $K_{*н} = K \setminus K_*$, $K^*_н = K \setminus K^*$, $K_н = K \setminus K_{оп}$, $J_н = J \setminus J_{оп}$.

Определение 4. Пара $\{u, M_{оп}\}$ из допустимого управления $u = (u(t), t \in T)$ и опоры называется опорным управлением. Будем называть его невырожденным, если 1) значения управления в опорные моменты некритические: $|u(t)| < 1$, $t \in T_{оп}$; 2) терминальное состояние $x(t^*)$, порожденное этим управлением, вместе с $\rho = \rho(u)$, $y = y(u)$ удовлетворяет неравенствам:

$$b_*(I_н) < H(I_н, J)(x(t^*) - Dy) < b^*(I_н), \quad \rho f_*(K_{*н}) < y(K_{*н}),$$
$$y(K_н^*) < \rho f^*(K_н^*).$$

3. Формула приращения критерия качества. Пусть $\{u, M_{оп}\}$ — опорное управление.

Обозначим

$$\zeta_{оп} = \zeta(I_{оп}) = \int_0^{t^*} h(I_{оп}|t)u(t)\,dt + \eta_0(I_{оп}) - G(I_{оп}, K)y, \quad \omega_* = \omega_*(K) =$$
$$= y(K) - \rho f_*(K), \quad \omega^* = \omega^*(K) = y(K) - \rho f^*(K).$$

Наряду с допустимым управлением $u(t)$, $t \in T$ с $\rho = \rho(u)$ и $y = y(u)$ рассмотрим тройку $(\bar u(t), t \in T; \bar y, \bar\rho)$, удовлетворяющую для выбранных $\bar\zeta_{оп}, \bar\omega_*, \bar\omega^*$ равенствам

$$\bar\zeta_{оп} = \int_0^{t^*} h(I_{оп}|t)\bar u(t)\,dt + \eta_0(I_{оп}) - G(I_{оп}, K)\bar y,$$
$$\bar\omega_{*оп} = \bar y(K_*) - \bar\rho f_*(K_*), \quad \bar\omega^*_{оп} = \bar y(K^*) - \bar\rho f^*(K^*).$$

Введем дополнительное обозначение

$$\Delta\zeta_{оп} = \bar\zeta_{оп} - \zeta_{оп}, \quad \Delta\omega_{*оп} = \bar\omega_{*оп} - \omega_{*оп}, \quad \Delta\omega^*_{оп} = \bar\omega^*_{оп} - \omega^*_{оп},$$
$$\Delta y(K) = \bar y(K) - y(K), \quad \Delta x(J_{оп}|t^*) = \Delta x_{оп}(t^*) = \bar x_{оп}(t^*) -$$
$$- x_{оп}(t^*), \quad \Delta y(K_*) = \bar y(K_*) - y(K_*), \quad \Delta y(K^*) = \bar y(K^*) - y(K^*),$$
$$f_{*оп} = f_*(K_*), \quad f^*_{оп} = f^*(K^*), \quad \Delta u(t) = \bar u(t) - u(t), \quad t \in T.$$

Приращение $\Delta\rho = \bar\rho(u) - \rho(u)$ критерия качества задачи (4) при переходе от опорного управления $\{u, M_{оп}\}$ к управлению $\bar u(t)$, $t \in T$, равно:

$$\Delta\rho = \begin{cases} -\int_0^{t^*} \Delta(t)\Delta u(t)\,dt + \sum_{i \in I_{оп}} \nu_i \Delta\zeta_i - \sum_{k \in K_н} \Delta_k \Delta y_k - \sum_{k \in K_*} \Delta_{*k}\Delta\omega_{*k} - \\ \qquad - \sum_{k \in K^*} \Delta_k^* \Delta\omega_k^*, \ \text{если } K_* \cap K^* = \varnothing, \\ \Delta_{*k_0}\Delta\omega_{*k_0} + \Delta_{k_0}^*\Delta\omega_{k_0}^*, \ \text{если } K_* \cap K^* = k_0, \ f_*(k_0) \neq f^*(k_0). \end{cases} \tag{6}$$

В этой формуле вектор $\nu'_{оп} = (0, -1)' P_{оп}^{-1}$ называется вектором потенциалов; $\Delta(t)$, $t \in T$, Δ_{*k}, $k \in K_*$; Δ_k^*, $k \in K^*$ [1].

С помощью формулы (6) доказан

Критерий оптимальности. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, достаточно выполнения соотношений: 1) если $M_{оп}$ — опора первого типа, то

$$\nu_i \leqslant 0 \text{ при } h'_{(i)}(x(t^*) - Dy) = b_i^*; \ \nu_i \geqslant 0 \text{ при } h'_{(i)}(x(t^*) - Dy) = b_{*i}; \ \nu_i =$$
$$= 0 \text{ при } b_{*i} < h'_{(i)}(x(t^*) - Dy) < b^*_{(i)}, \ i \in I_{оп}; \ \Delta(t) \leqslant 0 \text{ при } u(t) = -1;$$
$$\Delta(t) \geqslant 0 \text{ при } u(t) = 1; \ \Delta(t) = 0 \text{ при } -1 < u(t) < 1, \ t \in T; \ \Delta_{*k} \leqslant 0$$
$$\text{при } y_k = \rho f_{*k}; \ \Delta_{*k} = 0 \text{ при } y_k > \rho f_{*k}, \ k \in K_*; \ \Delta_k^* \geqslant 0 \text{ при } y_k = \rho f_k^*;$$
$$\Delta_k^* = 0 \text{ при } y_k < \rho f_k^*, \ k \in K^*; \ \Delta_k = 0 \text{ при } k \in K_н; \tag{7}$$

2) если $M_{оп}$ — опора второго типа, то

$$\Delta_{*k_0} \leqslant 0 \text{ при } y_{k_0} = \rho f_{*k_0},\ \Delta_{*k_0} = 0 \text{ при } y_{k_0} > \rho f_{*k_0},\ k_0 \in K_{0*};$$

$$\overset{*}{\Delta}_{k_0} \geqslant 0 \text{ при } y_{k_0} = \rho \overset{*}{f}_{k_0},\ \overset{*}{\Delta}_{k_0} = 0 \text{ при } y_{k_0} < \rho \overset{*}{f}_{k_0},\ k_0 \in K_0^*. \tag{8}$$

Пусть $\{u, M_{оп}\}$ — невырожденное опорное управление. Тогда условия (7), (8) необходимы для оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$.

Список литературы

1. Тагайназаров С. Адаптивный метод решения одной специальной задачи линейного программирования / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1989. 31 с. Деп. в ВИНИТИ 22.11.89.

Поступила в редакцию 27.10.90.

УДК 517.9

В. И. МИРОНЕНКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ЗА ПЕРИОД

Высокая размерность системы дифференциальных уравнений часто является большим препятствием при изучении этой системы. В том случае, когда система распадается на отдельные независимые подсистемы, ее исследование значительно облегчается. Аналогичным образом изучение 2ω-периодической по t системы размерности $m + n$ вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y),\quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y),$$
$$x \in D_1 \subset \mathrm{R}^m,\ y \in D_2 \subset \mathrm{R}^n,\ t \in \mathrm{R}, \tag{1}$$

с однозначно определяемыми своими начальными данными решениями $\varphi(t;\ t_0, x_0, y_0)$, $\psi(t;\ t_0, x_0, y_0)$ значительно облегчается, если ее отображение за период

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(\omega;\ -\omega, x, y) \\ \psi(\omega;\ -\omega, x, y) \end{pmatrix}$$

распадается на два независимых отображения

$$x \mapsto \varphi_1(\omega;\ -\omega, x) \text{ и } y \mapsto \psi_1(\omega;\ -\omega, y),$$

являющихся отображениями за период независимых систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x), \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = g_1(t, y) \tag{3}$$

размерностей m и n соответственно, т. е., если

$$\varphi(\omega;\ -\omega, x, y) \equiv \varphi_1(\omega;\ -\omega, x),\ \psi(\omega;\ -\omega, x, y) \equiv \psi_1(\omega;\ -\omega, y).$$

В связи со сказанным возникают вопросы: существуют ли вообще нераспадающиеся системы с распадающимися отображениями за период? Можно ли построить достаточно большие множества таких систем? Можно ли построить эффективный алгоритм их распознавания? Частично на эти вопросы дает ответ настоящая работа.

Нам понадобятся некоторые сведения об отражающей функции, доказательства которых содержатся в [1].

Пусть решения системы

$$\frac{dz}{dt} = Z(t, z),\ t \in \mathrm{R},\ z \in D_0 \subset \mathrm{R}^k \tag{4}$$