

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ КОТОРЫХ НЕ ИМЕЕТ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

В работах [1]—[3] выделены некоторые классы дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{j=0}^n P_j(z, u, u') u''^{n-j} = 0, \quad (1)$$

где $P_j(z, u, u')$ — полином относительно u, u' с аналитическими по $z \in D$ коэффициентами, общий интеграл которых не имеет подвижных многозначных особенностей (уравнение Р-типа). В работах [1—2] эти исследования проводились в основном с целью получить существенно новые трансцендентные функции, и эта задача осталась открытой. В [2] при $n=2$ получены некоторые уравнения Р-типа, решения которых выражаются через решения пятого и шестого уравнений Пенлеве. В [3] предложен метод, позволяющий строить уравнения вида (1) Р-типа, решения которых рациональным образом выражаются через решения уравнений Пенлеве ($P_1 - P_6$) при различных n .

В настоящей работе этим методом построено уравнение Р-типа вида (1) с $n=2$, решение которого рационально выражается через решение третьего уравнения Пенлеве:

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w}{z} + \frac{1}{z} (\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \quad \gamma \delta \neq 0 \quad (P_3)$$

(без ограничения общности считаем $\gamma = -\delta = 1$ [4]).

Заметим, что в [3] уравнение Р-типа вида (1), связанное с уравнением (P_3), приведено при $n=3$. Следуя [3], систему, эквивалентную уравнению (P_3), будем искать в виде:

$$\begin{aligned} w' &= a_0 w^2 + u w + a_2, \\ w u' &= b_0 w^2 + b_1 w + b_2 + (c_0 w^2 + c_1 w + c_2) u, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_i, b_j, c_j ($i=0, 2; j=0, 1, 2$) — функции z .

Из первого уравнения системы (2) следует, что $u(z)$ выражается рационально через w, w' и, таким образом, если w не имеет подвижных многозначных особенностей (Р-свойство), то и u также имеет Р-свойство. Исключая из (2) u , сравнивая полученное уравнение с (P_3), для определения коэффициентов имеем систему:

$$\begin{aligned} a_0 &= -c_0, \quad c_1 = -1/z, \quad c_2 = a_2, \quad a_0 c_0 = -1, \quad b_0 = a_0 c_1 + \alpha/z, \\ b_1 &= a_0 c_2 + a_2 c_0, \quad b_2 = a_2 c_1 + \beta/z, \quad a_2 c_2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) находим, что одна из эквивалентных уравнению (P_3) систем имеет вид:

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon_1 w^2 + u w + \varepsilon_2, \quad z w u' = (\alpha - \varepsilon_1) w^2 - u (\varepsilon_1 z w^2 + w - \varepsilon_2 z) + \beta - \varepsilon_2, \\ \varepsilon_1^2 &= \varepsilon_2^2 = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Потребуем, чтобы во втором уравнении системы (4) множители, стоящие при w^0, w^2 , не были нулевыми, т. е.

$$z u - \varepsilon_1 \alpha + 1 \neq 0, \quad z u + \varepsilon_2 \beta - 1 \neq 0. \quad (5)$$

Для этого, в силу (4), достаточно выполнения условия

$$\alpha + \eta_1 \beta \neq 2 \eta_2, \quad \eta_1^2 = \eta_2^2 = 1. \quad (6)$$

В противном случае, т. е. при невыполнении хотя бы одного условия (5), уравнение (P_3) вырождается в уравнение Риккати с условием (6), которое интегрируется через функции Бесселя [4].

Итак, система (4) является системой Р-типа, так как ω и u не имеют подвижных критических точек. Определим уравнение, описывающее функцию $u(z)$. Для этого исключим ω из (4). В результате получим уравнение Р-типа вида (1) с $n=2$

$$\begin{aligned} z^2 u''^2 + 4zu'' \{u' + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 zu + \varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha\} - u'^2 \{z^2 u^2 - 4\} - \\ - 2u' \{zu^3 - 8\varepsilon_1 \varepsilon_2 zu - 4(\varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha)\} - u^4 \{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 z^2 + 1\} - \\ - 4zu^3 \{\varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha\} + 4u^2 \{4z^2 + \alpha \beta - \varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha + \varepsilon_1 \varepsilon_2\} + \\ + 16zu \{\varepsilon_2 \beta - \varepsilon_1 \alpha\} + 4\{\varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha\}^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом справедлива

Теорема 1. Уравнение (7) имеет Р-тип и его решения выражаются через решения уравнения (P_3) по формуле:

$$u = (\omega' - \varepsilon_2) / \omega - \varepsilon_1 \omega. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые свойства решений уравнения (7) в силу полученного соотношения (8). Прежде всего отметим, что фундаментальная область пространства параметров уравнения (7) в силу (8) совпадает с фундаментальной областью пространства параметров уравнения (P_3) [4], т. е.

$$\operatorname{Re} \beta \geq 0, \operatorname{Re}(\alpha - \beta) \geq 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) \leq 2. \quad (9)$$

Построим рациональные решения (0-решения) уравнения (7). Заметим, что если ω — 0-решение уравнения (P_3) , то u также является 0-решением уравнения (7). Для существования 0-решений уравнения (P_3) необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\text{либо а) } \alpha + \beta = 4n, \text{ либо б) } \alpha - \beta = 4n, n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Покажем, что условие (10) является необходимым и достаточным для существования рациональных решений уравнения (7). Для этого можно воспользоваться методом доказательства аналогичного утверждения для уравнения (P_3) [4]. Пусть $u(z, \alpha, \beta)$ 0-решение уравнения (7). Тогда оно имеет конечное число полюсов. В окрестности полюса $z_0 \neq 0$ решение имеет разложение

$$u(z, \alpha, \beta) = \frac{2\varepsilon}{z - z_0} + \sum_{i=0}^{\infty} h_i (z - z_0)^i, \varepsilon^2 = 1.$$

Определим вычет точки $z = \infty$ решения $u(z, \alpha, \beta)$. Сделаем в (7) замену

$zt = 1$ и в полученное уравнение подставим разложение $u = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k t^k$.

Тогда найдем, что вычет точки $z = \infty$ равен $(-\varepsilon_2 \beta + \varepsilon_1 \alpha) / 2$. Теперь, воспользовавшись теоремой о полной сумме вычетов однозначной функции с конечным числом особых точек, получаем условие (10). Доказательство же достаточности следует из соотношения (8) и теоремы 7.1 [4], согласно которой при выполнении условия (10) уравнение (P_3) имеет 0-решения. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (7) имело рациональные решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10).

Список литературы

1. Bureau F. // Ann. mat pura ed appl. 1972. V. 91. P. 163.
2. Bureau F., Garset A. // Ibid. 1972. V. 92. P. 177.
3. Громан В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1978. № 1.
4. Громан В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.

Поступила в редакцию 11.10.90.