

СТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

В работе найдены элементарные делители элементов группы $O_n(K, Q)$, $n = 2m$, над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2. Для любого допустимого набора элементарных делителей строится элемент группы $O_n(K, Q)$ в явном виде.

Определения и обозначения из [1], [2].

Теорема. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 2; V — n -мерное, $n = 2m$, векторное пространство над K ; $Q: V \rightarrow K$ — невырожденная квадратичная форма; $O_n(K, Q)$ — группа ортогональных преобразований пространства V .

1. Элементарными делителями элементов группы $O_n(K, Q)$ являются многочлены вида: а) $(x + 1)^{2l}$ может входить в состав элементарных делителей произвольное число раз; б) парами могут входить $(x + \alpha)^l$, $(x + \alpha^{-1})^l$, $\alpha \neq 1$, l — произвольное и $(x + 1)^l$, $(x + 1)^l$, l — нечетное.

2. Любая конечная система многочленов, удовлетворяющих условиям а), б), есть набор элементарных делителей ортогонального преобразования.

Доказательство первого утверждения следует из [2] и [3]. В [2] доказано, что в пространстве V существует базис, в котором $O_n(K, Q)$ совпадает с подгруппой всех матриц $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ симплектической группы $Sp_n(K)$ таких, что диагональные элементы матриц tAC , tBD равны нулю (t означает транспонирование). Элементарные делители группы $Sp_n(K)$ над полем характеристики 2 найдены в [3]. Над алгебраически замкнутым полем получим лишь многочлены вида а) и б). Первое утверждение следует также из [4] и [5].

Доказательство второго утверждения теоремы.

а) Пусть $H = \begin{bmatrix} 0_n & E_l \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0_n & E_l \\ E_l & 0_n \end{bmatrix}$, где 0_n — нулевая $l \times l$ -матрица, E_l — единичная матрица; V — векторное пространство размерности $n = 2l$ над полем K характеристики 2,

$$e_1, \dots, e_n \quad (1)$$

— базис пространства V . Рассмотрим отображение $Q: V \rightarrow K$, $Q(X) = {}^tXHX$ и $f: V \times V \rightarrow K$, $f(X, Y) = {}^tXFY$. Так как $H + {}^tH = F$ и ${}^tYHX = {}^tX{}^tHY$, то непосредственно проверяется, что $Q(cX + dY) = c^2Q(X) + d^2Q(Y) + cd f(X, Y)$, $c, d \in K$. Следовательно, Q является квадратичной формой с матрицей H в базисе (1), f — соответствующая ей билинейная форма с матрицей F . Форма Q — невырожденная, так как подпространство, ортогональное к V относительно формы f , нулевое. Построим элемент группы $O_n(K, Q)$ с элементарным делителем $(x + 1)^{2l}$. Рассмотрим

$n \times n$ -матрицу, $n = 2l$, $R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_n^{l-1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{l-1} & C_n^l \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и имеют порядок $l \times l$. Непосредственно проверяется, что ${}^tRFR = F$, ${}^tRHR = H + T$, где $T = \begin{bmatrix} {}^tAC & {}^tAD + E_l \\ {}^tBC & {}^tBD \end{bmatrix}$. Здесь ${}^tAC = {}^tBD = 0$ (при вычислении tBD учитывается, что $n = 2l$ и $C_n^l = 0$ при характеристике 2), ${}^t(BC) = {}^tAD + E_l$. Следовательно, T — симметрическая матрица с нулевыми элементами на главной диагонали. Матрица R имеет один элементарный делитель $x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^l x + 1 = (x+1)^n$, $n = 2l$. Гомоморфизм σ пространства V с матрицей R в базисе (1) принадлежит $O_n(K, Q) : Q(\sigma X) = Q(X)$ следует из ${}^tRFR = R$ и ${}^tRHR = H + T$.

б) Рассмотрим многочлены $(x + \alpha)^l$, $(x + \alpha^{-1})^l$, $\alpha \neq 1$. Пусть H и F те же, что в а), A — $l \times l$ -матрица с одним элементарным делителем $(x + \alpha)^l$ (A можно взять в форме Жордана). Матрица $R = A + {}^tA^{-1}$ имеет указанные выше элементарные делители и ${}^tRFR = F$, ${}^tRHR = H$. Поэтому гомоморфизм σ пространства V с матрицей R в базисе (1) принадлежит $O_n(K, Q)$ и имеет два элементарных делителя $(x + \alpha)^l$, $(x + \alpha^{-1})^l$, $n = 2l$.

в) Аналогично строится элемент группы $O_{2l}(K, Q)$ для многочленов $(x + 1)^l$, $(x - 1)^l$, где l — нечетное.

Пусть задана система многочленов, удовлетворяющих условиям а), б) теоремы, сумма степеней которых равна $n = 2m$. Для этих многочленов, как в а) — в), рассмотрим матрицы H, F, R . Пусть H_1, F_1, R_1 — прямые суммы соответственно матриц H, F и R . Выберем в пространстве V какой-либо базис $e_1, \dots, e_n$ и определим на V квадратную форму Q с помощью матриц H_1, F_1 , а гомоморфизм σ пространства V с помощью матрицы R_1 . σ будет ортогональным преобразованием пространства V с заданной системой элементарных делителей. Второе утверждение доказано, так как невырожденные квадратичные формы пространства V над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 эквивалентны [1, § 16].

Автор благодарит И. Д. Супруненко за участие в обсуждении работы и замечания.

Список литературы

1. Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. М., 1974.
2. Козел П. Т. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1984. № 3. С. 45.
3. Козел П. Т. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 6. С. 488.
4. Wall G. E. // Austr. Math. Soc. 1963. V. 3. P. 1.
5. Hesselink W. H. // Math. Z. 1979. V. 166. P. 165.

Поступила в редакцию 03.05.90.

УДК 517.53

В. Н. РУСАК, ТА ХОНГ КУАНГ (СРВ)

О СРАВНЕНИИ НАИЛУЧШЕГО РАЦИОНАЛЬНОГО И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В КРУГЕ $|z| \leq 1$

Рассмотрим класс функций, аналитических в $|z| \leq 1$, вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{l_k}, \quad (1)$$

где $(l_k)_{k=0}^{\infty}$ — целочисленная арифметическая прогрессия с положительной разностью d .

Через $R_{n,m}(f)$ будем обозначать наилучшее равномерное рациональное приближение функции $f(z)$ в $|z| \leq 1$ рациональными функциями, порядки числителей и знаменателей которых не превышают n и m соответственно, т. е.