



УДК 517.95

И. Е. МОЗОЛЕВСКИЙ, А. В. КОРЗЮК, В. П. РОГАЧ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПЛОСКОСТИ В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Метод конечных элементов в настоящее время представляет собой хорошо развитую область вычислительной математики, теоретические и прикладные аспекты которой достаточно полно изложены в литературе [1—4]. Тем не менее практическая реализация метода конечных элементов, в отличие от сеточных методов, требует довольно сложного программирования даже для простых задач. Существующие большие коммерческие пакеты, основанные на применении метода конечных элементов для решения прикладных задач в той или иной предметной области, обычно содержат свою специализированную базу данных, макро-язык для контроля за правильностью ввода — вывода, обильный графический интерфейс и т. д. Однако зачастую они слишком узко специализированы, машинозависимы и сложны в применении. Поэтому пользователь, которому надо решить даже достаточно простую задачу методом конечных элементов, зачастую сталкивается с неприятной альтернативой: с необходимостью либо осваивать какой-либо сложный пакет прикладных программ, реализующий метод конечных элементов на вычислительных системах большой мощности (что само по себе уже является сильным ограничением), либо пытаться самому разрабатывать нужное программное обеспечение.

Задачи со смешанными граничными условиями для уравнения Пуассона в двумерной области сложной геометрии возникают в различных практических областях: электродинамике, микроэлектронике, теплофизике и т. д. Теоретические аспекты их разрешимости и свойства решений исследованы с исчерпывающей полнотой. Однако применение стандартных сеточных методов для численного решения таких граничных задач затруднительно в силу произвольности геометрии области. Поэтому рассмотрим численное решение задачи методом конечных элементов и его реализацию в виде программного комплекса для ПЭВМ класса ЕС-1841 и выше. В состав комплекса входит автоматический генератор сеток и средства визуализации сгенерированной сетки и полученного решения.

Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная многоугольником $\partial\Omega$ область на плоскости. Предположим, что граница $\partial\Omega$ разделена на две части $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ так, что $\int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} ds = 0$ и $\partial\Omega_1$ либо пусто, либо обра-

зовано конечным числом замкнутых отрезков. Далее, пусть $C^m(\bar{\Omega})$ ($m \geq 0$) — множество функций, непрерывно дифференцируемых до порядка m включительно в области Ω вплоть до границы. Обозначим через

$C_I^m(\bar{\Omega})$ ($m \geq 1$) множество функций $u \in C^{m-1}(\Omega)$, для которых существуют непересекающиеся подобласти $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ области Ω , такие, что

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^p \bar{\Omega}_i \text{ и } u|_{\bar{\Omega}_i} \in C^m(\Omega_i).$$

Пространство $C_I(\Omega) = C_I^0(\Omega)$ определим как множество функций u в Ω , для которых сужение u на Ω_i допускает непрерывное продолжение на R^2 .

Рассмотрим в области Ω задачу:

для заданных f и g найти u такое, что

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{01}$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = g, \tag{02}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0. \tag{03}$$

Через $L_2(\Omega)$ обозначим гильбертово пространство суммируемых с квадратом по Лебегу функций в Ω со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

Далее, зададим в $C_I^m(\Omega)$ скалярное произведение

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| < 1, |\beta| < 1} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\beta} v(x) dx$$

и пусть $H^m(\Omega)$ — пространство Соболева, которое при сделанных предположениях можно рассматривать как пополнение $C_I^m(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{2,m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} [D^{\alpha} u(x)]^2 dx \right)^{1/2},$$

порождаемой данным скалярным произведением [1]. Пусть

$$W = \{u \in C_I^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega_1} = 0\}$$

и пусть V — замыкание W в $H^1(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{2,1}$. Далее, рассмотрим на $V \times V$ билинейную форму

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v(x) \nabla u(x) dx. \tag{1}$$

Лемма 1. Билинейная форма (1) симметрична, непрерывна и коэрцитивна на $V \times V$.

Предположим, что существует продолжение g на $\bar{\Omega}$ класса $C_I^1(\bar{\Omega})$, которое мы снова обозначим через g , и пусть $W_g = g + W$, а V_g — замыкание W_g в $H^1(\Omega)$. В слабой постановке задача (01) — (03) формулируется следующим образом:

для заданных $f \in C_I^0(\bar{\Omega})$ и $g \in C(\partial\Omega_1)$ найти $u \in V_g$ такое, что

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Теорема 1. Для любого $f \in C_I^2(\bar{\Omega})$ и любого g , допускающего продолжение на Ω класса $C_I^2(\bar{\Omega})$, существует единственное $u \in V_g$, являющееся решением задачи (2).

Доказательство данных утверждений проводится стандартным способом [2].

Метод конечных элементов для задачи (2). Для приближенного решения задачи применим метод конечных элементов первого порядка. Более точно, пусть $\{T_i\}_{i=1}^N$ — множество замкнутых треугольников на плоскости, каждые два из которых либо не пересекаются, либо имеют

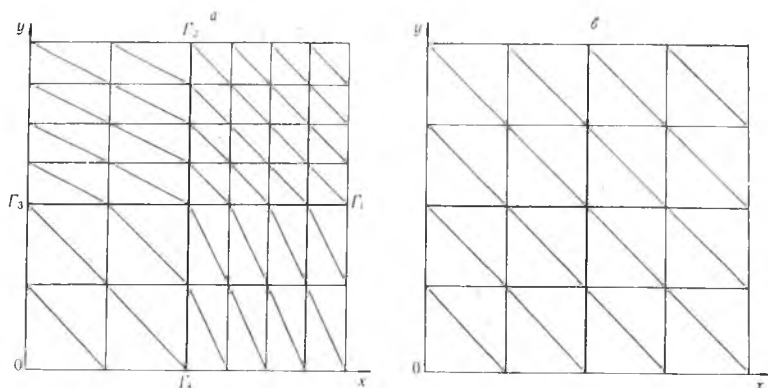


Рис. 1. Адаптивная (а) и равномерная (б) сетки для решения тестовой задачи

общую сторону или вершину. Предположим, что $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N T_i$, причем пересечение каждого треугольника с $\partial\Omega_1$ либо пусто, либо совпадает с вершиной или стороной треугольника. Пусть $\{P_i\}_{i=1}^M$ — множество всех вершин треугольников $\{T_i\}_{i=1}^N$. Пространство U конечных элементов первого порядка в $\bar{\Omega}$ определим следующим образом: функция $u \in U$ однозначно определяется своими значениями в точках $P_i, i = 1, M$, а ее сужение на каждый треугольник является функцией вида $ax + by + c$. Несложно проверить, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. $U \subseteq C_1^1(\bar{\Omega})$.

Базисом Лагранжа в пространстве U назовем систему функций $u_i, u_M \subset U$ таких, что $u_i(P_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим последовательность пространств $\{U_\alpha\}$, удовлетворяющую условию $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha = 0$, где h_α — максимальный из диаметров треугольников T_j , относящихся к U_α . Предположим, что последовательность пространств $\{U_\alpha\}$ является равномерной с постоянной q , т. е. для любой базисной функции $u_i \in U_\alpha$

$$\max_{\substack{\alpha \\ i \neq j}} \sup_{x \in T_k} |u_i| \leq q h_\alpha^{-j} \forall 1 \leq i \leq M, \forall 1 \leq k \leq N, \forall j_s = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $W_\alpha = W \cap U_\alpha$ и $V_{g_\alpha} = g_\alpha + W_\alpha$, где $g_\alpha \in U_\alpha, g_\alpha(P_i) = g(P_i) \forall i = 1, \dots, M$ — аппроксимация g в пространстве U_α . Аналогично [2] можно показать, что имеет место следующий результат.

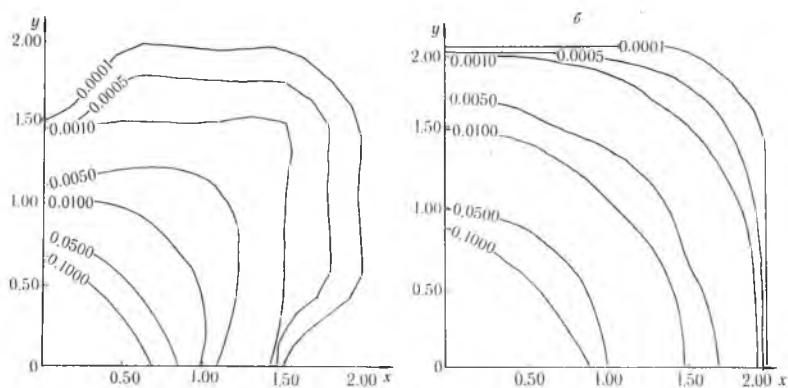


Рис. 2. Изолинии относительной погрешности для адаптивной (а) и равномерной (б) сеток

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда $\forall \alpha > 0$ существует единственный элемент $u_{g_\alpha} \in V_{g_\alpha}$, такой, что

$$a(u_{g_\alpha}, v) = (f, v) \quad \forall v \in W_\alpha, \quad (3)$$

причем $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|u_{g_\alpha} - u\| = 0$,

где u — решение задачи (2).

Программная реализация метода конечных элементов.

Приближенное решение задачи (01) — (03) методом конечных элементов можно условно разделить на следующие этапы:

- генерация сетки, т. е. разбиение области, в которой ищется решение, на треугольные элементы;
- задание значений правой части и граничных значений в соответствующих узлах сгенерированной сетки;
- построение локальных и глобальных матриц жесткости и соответствующих векторов нагрузок;
- решение результирующей системы алгебраических уравнений и вывод полученных значений.

Данный алгоритм реализован на ПЭВМ ЕС1841 в виде программного комплекса на языке TURBO — PASCAL-3.0 с использованием графического пакета TURBO — GRAPHICS-1,5А для вывода графических результатов. В качестве автоматического генератора сетки использовалась процедура, аналогичная программе GRID из [3], позволяющая произвольным образом изменять плотность сетки в различных частях области. При этом предусмотрена линейная интерполяция условий Дирихле на вновь полученные граничные узлы. Локальные матрицы жесткости и векторы нагрузки рассчитывались на основе интегрального соотношения (3) с помощью метода Бубнова — Галеркина. Для решения системы линейных уравнений применялся метод Холесского. Пользователь имеет возможность графической интерпретации полученных результатов, включая вывод сгенерированной сетки и изолиний полученного решения.

Для иллюстрации возможностей пакета рассмотрим граничную задачу:

$$\Delta u = 4b\Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = y^2 + 4, \quad u|_{\Gamma_2} = x^2 + 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0,$$

имеющую точное решение $u = x^2 + y^2$.

На рис. 1 приведены соответствующие обозначения и изображены адаптивная и равномерная сетки, построенные по четырем зонам, на которые условно разбивалась расчетная область. На рис. 2 показаны изолинии относительной погрешности численного решения задачи на адаптивной и равномерной сетках.

Список литературы

1. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М., 1978.
3. Сегерленд Л. Применение метода конечных элементов. М., 1979.
4. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М., 1986.

Поступила в редакцию 10.02.90.