Применяя к нему преобразование Фурье

$$G(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g(t)\,dt;\quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} G(t)\,dt,$$

имеем

$$\Psi(x)\left[1+\frac{\varkappa}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{\lambda}}\right]=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{5}{2}\lambda t+ixt}}{(e^{2\lambda t}+e^{2\lambda a})(e^{2\lambda t}+e^{-2\lambda a})}.$$

Вычисляя последний интеграл, получим:

$$\Psi(x)=\frac{2\pi\alpha}{\lambda\operatorname{sh}2\lambda a}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda}{2}+ix\right)a}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{\lambda}+\frac{\pi i}{4}\right)}\cdot\frac{c\lambda\frac{\pi x}{\lambda}}{\left(\varkappa+\operatorname{ch}\frac{\pi x}{\lambda}\right)}.$$

Беря от этой функции обратное преобразование Фурье и используя (32), находим $f(x)$:

$$f(x)=\frac{\mathrm{X}(x+2ih)}{e^{\frac{\lambda x}{2}}}\cdot\frac{\alpha}{\lambda\operatorname{sh}2\lambda a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda}{2}+it\right)a\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi t}{\lambda}\cdot e^{-ixt}}{\left(\varkappa+\operatorname{ch}\frac{\pi t}{\lambda}\right)\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{\pi t}{\lambda}+\frac{\pi i}{4}\right)}.$$

Таким образом, входящая в (30) неизвестная функция $f(\tau)$ определена. Тем самым построено в квадратурах общее решение задачи (8)—(10), а значит, и исходной задачи о вдавливании штампа.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Зверович Э. И. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. Вып. 1 (157). С. 113.

Поступила в редакцию 04.04.91.

УДК 519.21

Г. А. МЕДВЕДЕВ

О СООТВЕТСТВИИ РЕГРЕССИОННЫХ И АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

Наиболее распространенными математическими моделями наблюдаемых случайных процессов и полей являются регрессионные и авторегрессионные модели. Они описываются соответственно следующими соотношениями:

$$Y(X)=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X)+\xi(X),\ X\in\mathbf{R}^{(m)},\tag{1}$$

$$y(x)=\sum_{x_k\in N}\theta_k y(x-x_k)+\eta(x),\ x\in\mathbf{Z}^{(m)}.\tag{2}$$

Для простоты будем полагать, не теряя общности, что $Y\in\mathbf{R}^{(1)}$, $y\in\mathbf{R}^{(1)}$; $\xi(X)$ и $\eta(x)$ — некоторые случайные процессы (поля) с заданными свойствами. Множество, порождающее активных соседей (ПАС), $N=\mathbf{Z}^{(m)}$. Таким образом, чтобы построить регрессионную модель процесса (поля) $Y(X)$, необходимо задать набор коэффициентов a_i, набор базовых функций $f_i(\cdot)$ и порождающий процесс (поле) $\xi(X)$. Чтобы построить авторегрессионную модель процесса (поля) $y(x)$, нужно задать набор коэффициентов θ_k, множество ПАС N и порождающий процесс (поле) $\eta(x)$.

Рассмотрим вложенный процесс (поле), описываемый соотношением (1), но для $X \in \mathbf{Z}^{(m)}$. Представляет интерес рассмотреть вопрос о том, может ли такой вложенный процесс (поле) быть описанным моделью (2). Поскольку в общем случае трудно сформулировать конструктивное условие такого перехода от (1) к (2), рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Одномерная полиномиальная регрессия

Пусть

$$Y(X) = \sum_{l=0}^{n} a_i X^l + \xi(X), \quad X \in \mathbf{R}^1, \tag{3}$$

$\xi(X)$ — некоторая однородная случайная функция со средним значением E и корреляционной функцией $R(X) = M\{\xi(X')\xi(X'+X)\}$. Заметим, что справедливо представление

$$z(X) = \sum_{l=0}^{n} a_l X^l = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k z(X - kH);$$

для всякого $H \in \mathbf{R}^{(1)}$. Действительно, подставим в правую часть равенства функции $z(X-kH)$ в явном виде и, перегруппировав слагаемые, получим:

$$\sum_{l=0}^{n} a_l X^l = b_0 + \sum_{l=0}^{n} X^l \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{m=l}^{n} a_m C_m^l (-kH)^{m-l}. \tag{4}$$

Здесь C_m^l—биномиальные коэффициенты, а $H \neq 0$ $\left(\text{так как для } H = 0 \text{ доказываемое соотношение выполняется тривиально для } b_0 = 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} b_k = 1\right)$.

Поскольку (4) должно выполняться для всех $X \in \mathbf{R}^{(1)}$, то, приравнивая в (4) коэффициенты при одинаковых степенях X^l, получим систему уравнений относительно b_k, $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{m=0}^{n} a_m (-kH)^m = a_0, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{m=l}^{n} a_m C_m^l (-kH)^{m-l} = a_l, \quad 0 < l < n, \tag{6}$$

$$a_n \sum_{k=1}^{n} a_k = a_n. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 1. \tag{8}$$

Используя (8), уравнение (6) можно записать в виде:

$$\sum_{m=l+1}^{n} a_m C_m^l (-H)^{m-l} \sum_{k=1}^{n} k^{m-l} b_k = 0. \tag{9}$$

Придавая в (9) индексу l последовательно значения $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1, получим, что

$$\sum_{n=1}^{n} k^l b_k = \delta_{i0}, \quad 0 \leqslant l \leqslant n-1. \tag{10}$$

δ_{lk} — символ Кронекера.

Наконец, используя (8) и (10) в (5), получим:

$$b_0 = (-1)^{n+1} a_n \sum_{k=1}^{n} (kH)^n b_k. \tag{11}$$

Таким образом, коэффициенты b_k, $l \leqslant k \leqslant n$ находятся из неоднородной системы n линейных алгебраических уравнений (10), после чего по формуле (11) может быть вычислен коэффициент b_0.

Матрица системы (10) является матрицей Вандермонда $W=(W_{ij})$, у которой $W_{ij}=j^{i-1}$. Поскольку эта матрица является невырожденной, то система (10) имеет единственное решение. Причем поскольку правая часть (10) является вектором с единственной ненулевой компонентой (первой), то решение (10) определяется только элементами первого столбца матрицы W^{-1}. Используя следствие 3 Приложения, получаем, что

$$b_k = (-1)^{k+1} C_n^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получаем по следствию 12 Приложения

$$b_0 = n!\, H^n a_n. \tag{13}$$

Таким образом, полиномиальная функция (4) представима в виде:

$$z(X) = \sum_{l=0}^{n} a_l X^l = n!\; H^n a_n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k z(X-kH). \tag{14}$$

Используя (14) в (3), получаем:

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k Y(X-kH) + n!\; H^n a_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \xi(X-kH).$$

Наконец, производя переобозначения

$$\begin{gathered} x = X/H, \ \theta_k = (-1)^{k+1} C_n^k, \\ y(x) = Y(xH), \\ \eta(x) = n!\, H^n a_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \xi((x-k)H), \end{gathered} \tag{15}$$

вместо (3) получаем эквивалентную запись

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k y(x-k) + \eta(x), \tag{16}$$

которая переводит регрессионную модель (3) в авторегрессионную модель типа (2) с множеством ПАС $N=(1, 2, \ldots, n)$ и порождающим процессом $\eta(x)$, математическое ожидание которого равно $n!\ H^n a_n$, а корреляционная функция

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+k} C_n^k C_n^l R((x+k-l)H).$$

Примечательным здесь является тот факт, что коэффициенты авторегрессии (16) не зависят от коэффициентов регрессии (3).

Вместе с тем существенно то, что порождающий процесс $\eta(x)$ имеет систематическую составляющую $n!\ H^n a_n$.

2. Двумерная полиномиальная регрессия

Пусть теперь $X=(X_1, X_2) \in R^{(2)}$,

$$Y(X_1, X_2) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{l,k} X_1^l X_2^k + \xi(X_1, X_2) \tag{17}$$

Здесь $\xi(X_1, X_2)$ — однородное случайное поле с математическим ожиданием $M\{\xi(X_1, X_2)\} = E$ и корреляционной функцией $R(X_1, X_2) = M\{\xi(X_1', X_2')\xi(X_1'+X_1, X_2'+X_2)\}$.

Придадим (17) вид авторегрессии таким же образом, как это было сделано выше при переходе от (3) к (16). Предположим, что существует представление

$$z(X_1,\ X_2)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}a_{l,k}X_1^l X_2^k=b_{0,0}+\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(1-\delta_{lk0})\,b_{l,k}\times$$
$$\times z(X_1-lH_1,\ X_2-kH_2), \tag{18}$$

которое имеет место в каждой точке некоторой двумерной области $X\subset R^{(2)}$. Здесь δ_{jkl} — символ Кронекера, равный единице при $j=k=l$ и равный нулю в других случаях. Найдем коэффициенты $b_{l,k}$ представления (18) таким же способом, который использован при анализе (3). Это приводит к следующей системе уравнений относительно коэффициентов $b_{l,k}$:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(1-\delta_{lk0})\,b_{l,k}=1,$$

$$(1-\delta_{uv0}-\delta_{un}-\delta_{vm})\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}k^v l^u b_{k,l}=0, \tag{19}$$
$$0\leqslant u\leqslant n,\ 0\leqslant v\leqslant m.$$

$$b_{0,0}=(-1)^{m+n+1}a_{n,m}H_1^n H_2^m\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}l^n k^m b_{l,k}. \tag{20}$$

Используя следствия 13 и 14 Приложения, получим:

$$b_{0,0}=n!\,m!\,H_1^n H_2^m a_{n,m}, \tag{21}$$
$$b_{l,k}=(-1)^{1+l+k}C_n^l C_m^k \text{ в остальных случаях.}$$

Введем следующие переобозначения:

$$x_k=X_k H_k^{-1},\ k=1,\ 2;\ y(x_1,\ x_2)=Y(x_1H_1,\ x_2H_2), \tag{22}$$

$$\eta(x_1,\ x_2)=n!\,m!H_1^n H_2^m a_{n,m}+\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{l+k}C_n^l C_m^k\xi((x_1-l)H_1,\ (x_2-k)H_2),$$

$$\theta_{l,k}=(-1)^{1+k+l}C_n^l C_m^k.$$

Тогда, принимая во внимание (18), (21), (22), можно соотношение (17) записать в виде:

$$y(x_1,\ x_2)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(1-\delta_{lk0})\,\theta_{l,k}\,y(x_1-l,\ x_2-k)+\eta(x_1,\ x_2). \tag{23}$$

Таким образом, регрессионная модель (17) оказывается эквивалентной авторегрессионной модели (23) с множеством ПАС в виде целочисленной решетки прямоугольника $\{(l,\ k)/0\leqslant l\leqslant n,\ 0\leqslant k\leqslant m\}$ без одного узла $l=k=0$. Порождающее поле (23) имеет математическое ожидание $n!\ m!\ H_1^n\ H_2^m\ a_{n,m}$ и корреляционную функцию

$$r(x_1,\ x_2)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{l'=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{k'=0}^{m}(-1)^{l+l'+k+k'}C_n^l C_n^{l'} C_m^k C_m^{k'}\times$$
$$\times R((x_1+l-l')H_1,(x_2+k-k')H_2).$$

3. Гиперэкспоненциальная регрессия

Пусть (1) имеет вид:

$$Y(X)=\sum_{l=1}^{n}a_l e^{\omega_l X}+\xi(X),\ X\in R^{(1)}, \tag{24}$$

где $\omega_j\neq\omega_l$ для всякого $j\neq l$. Полагаем, что для некоторого $H\neq 0$

$$z(X)=\sum_{l=1}^{n} a_l e^{\omega_l X}=\sum_{k=1}^{n} b_k z(X-kH)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_k a_l e^{\omega_l (X-kH)}. \qquad (25)$$

Очевидно, что такое представление имеет место тогда, когда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{n} b_k e^{\omega_l kH}=1 \text{ для всех } 1\leqslant l\leqslant n, \qquad (26)$$

которые могут рассматриваться как система уравнений относительно коэффициентов b_k. Обозначим $W_{kl}=e^{-\omega_l kH}$, $W=(W_{kl})$, $E^*=(1,\ 1,\ \dots,\ 1)$. Тогда систему (26) можно записать в матричной форме:

$$W^*b=E. \qquad (27)$$

Здесь * — знак транспонирования.

Определитель матрицы W с точностью до постоянного множителя, равного $e^{-H\sum_{l=1}^{n}\omega_l}$, совпадает с определителем Вандермонда и при различных ω_l отличается от нуля. Поэтому решение системы (27) при принятых предположениях существует и представление (25) имеет место. В связи с этим (24) может быть представлена на множестве $\mathbf{Z}$ в виде авторегрессии:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k y(x-k)+\eta(x),\ x\in\mathbf{Z}, \qquad (28)$$

где, как и прежде, использованы обозначения

$$y(x)=Y(xH),\ \eta(x)=\xi(xH)-\sum_{k=1}^{n} b_k \xi((x-k)H),$$

а коэффициенты b_k находятся из уравнения (27).

Рассмотрим теперь двумерное поле:

$$Y(X_1;\ X_2)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{lk} e^{u_l X_1+v_k X_2}+\xi(x_1,\ x_2), \qquad (29)$$

где $u_i\neq u_j$, $v_i\neq v_j$ для всяких $i\neq j$. Предположим, что для некоторых $H_1\neq 0$, $H_2\neq 0$ имеет место представление

$$z(X_1,\ X_2)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{lk} e^{u_l X_1+v_k X_2}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m} b_{\alpha\beta} z(X_1-\alpha H_1,\ X_2-\beta H_2). \qquad (30)$$

Найдем коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ такого представления. Нетрудно видеть, что (30) имеет место, если справедливы следующие равенства:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m} b_{\alpha\beta} e^{-\alpha u_l H_1-\beta v_k H_2}=1,\ 1\leqslant l\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m. \qquad (31)$$

Эти равенства могут рассматриваться как уравнения относительно коэффициентов $b_{\alpha\beta}$. Обозначим $W_{\alpha l}^{(1)}=e^{-\alpha u_l H_1}$, $W_{\beta k}^{(2)}=e^{-\beta v_k H_2}$. Тогда (31) перепишется в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m} W_{\alpha}^{(1)} b_{\alpha\beta} W_{\beta k}^{(2)}=1. \qquad (32)$$

И если ввести в рассмотрение $(n\times n)$ — матрицу $W_1=(W_{\alpha l}^{(1)})$, $(m\times m)$ — матрицу $W_2=(W_{\beta k}^{(1)})$, $(n\times m)$ — матрицу $B=(b_{\alpha\beta})$ и $(n\times m)$ — матрицу E, составленную из единиц, то (32) запишется в матричной форме:

$$W_1^* B W_2=E. \qquad (33)$$

Определители матриц W_1 и W_2 являются определителями Вандермонда с точностью до множителей $e^{-H_1 \sum_{l=1}^{n} u_l}$ и $e^{-H_2 \sum_{k=1}^{m} v_k}$ соответственно. Поэтому при принятых предположениях относительно u_b и v_k матричное уравнение (33) имеет единственное решение

$$B = (W_1^{-1})^* E W_2^{-1}. \tag{34}$$

В связи с этим регрессионная модель (29) имеет свой авторегрессионный аналог

$$y(x_1, x_2) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} b_{\alpha\beta}\, y(x_1 - \alpha, x_2 - \beta) + \eta(x_1, x_2), \tag{35}$$

где x_1, x_2 — целочисленные переменные, $y(x_1, x_2) = Y(x_1 H_1, x_2 H_2)$,

$$\eta(x_1, x_2) = \xi(x_1 H_1, x_2 H_2) - \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} b_{\alpha,\beta}\, \xi((x_1 - \alpha) H_1, (x_2 - \beta) H_2).$$

В заключение заметим, что элементы вектора b из (27) и матрицы B в (34) находятся с использованием следствия 15 Приложения.

Считая в (25) и (30) коэффициенты ω_l, u_l, v_l комплексными и определяя функцию $z(\cdot)$ как вещественную часть соответствующих сумм, можно аналогичные результаты получить для регрессионных моделей с тригонометрическими базовыми функциями.

Таким образом, довольно широкий класс регрессионных моделей с полиномиальными, экспоненциальными и тригонометрическими базовыми функциями может быть описан авторегрессионными моделями.

Аналогичная проблема рассматривалась в [1] при построении ARIMA процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть W_n — $(n \times n)$ — матрица Вандермонда с элементами $(W_n)_1 = 1$, $(W_n)_{i,j} = r_j^{i-1}$, $1 < i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Известно [2], что ее определитель $\det W_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (r_j - r_i)$. В частности, если $r_j = j$, то $\det W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (i!)$.

Лемма 1. Алгебраические дополнения элементов первой строки $\det W_n$ имеют вид:

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \left(\prod_{i=1}^{n} r_i / r_k\right) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (r_j - r_i) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i)\right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k)\right).$$

$\left(\text{Здесь и ниже принимается } \prod_{i=1}^{0} (\ldots)_i \equiv 1\right).$

Доказательство леммы сводится к вычислению миноров первой строки $\det W_n$, которые, в свою очередь, с точностью до множителя являются определителями Вандермонда, но порядка, меньшего на единицу, чем исходный определитель.

Следствие 1 Элементы первого столбца матрицы W_n^{-1} имеют вид:

$$(W_n^{-1})_{k1} = (-1)^{1+k} \prod_{i=1}^{n} r_i \Big/ r_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i)\right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k)\right).$$

Следствие 2. Если $r_i = i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \prod_{i=1}^{n} (i!) / k!\,(n-k)!$$

Следствие 3. Если $r_i = i$, то элементы первого столбца матрицы W_n^{-1} имеют вид:

$$(W_n^{-1})_{k1} = (-1)^{1+k} C_n^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Лемма 2. Алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы W_n имеют вид:

$$A_{nk} = (-1)^{n+k} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (r_j - r_i) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k)\right).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Следствие 4. Элементы последнего столбца матрицы W_n^{-1} имеют вид

$$(W_n^{-1})_{kn} = (-1)^{n+k} \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_j)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k)\right).$$

Следствие 5. Если $r_i = i$, то

$$A_{nk} = (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^{n-1} (i!) / (k-1)!\,(n-k)!$$

Следствие 6. Если $r_i = i$, то элементы последнего столбца имеют вид:

$$(W_n^{-1})_{kn} = (-1)^{n+k} / (k-1)!\,(n-k)!.$$

Рассмотрим теперь матрицу Вандермонда W_{n+1}, у которой $(W_{n+1})_{ij} = (j-1)^{i-1}$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, $1 < i \leqslant n+1$.

Следствия 2, 3, 5, 6 для такой матрицы модифицируются к следующим.

Следствие 7. Алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы W_{n+1} имеют вид:

$$A_{11} = \prod_{i=1}^{n} (i!), \quad A_{1k} = 0, \quad 1 < k \leqslant n+1.$$

Следствие 8. Алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы W_{n+1} имеют вид:

$$A_{n+1,\,k} = (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^{n} (i!) / k!\,(n-k)!, \quad 1 \leqslant k \leqslant n+1.$$

Следствие 9. Элементы первого столбца матрицы W_{n+1}^{-1} имеют вид:

$$(W_{n+1}^{-1})_{11} = 1, \quad (W_{n+1}^{-1})_{k1} = 0, \quad 1 < k \leqslant n+1.$$

Следствие 10. Элементы последнего столбца матрицы W_{n+1}^{-1} имеют вид:

$$(W_{n+1}^{-1})_{kn} = (-1)^{k+n} / k!\,(n-k)!, \quad 1 \leqslant k \leqslant n+1.$$

Пусть теперь Δ — вектор с компонентами $\Delta_l = \delta_{1l} + d\delta_{n+1,l}$, $1 \leqslant l \leqslant n+1$. Это означает, что у этого вектора отличается от нуля только первая (она равна 1) и последняя (она равна d) компоненты. Введем в рассмотрение $(n+1)$ — вектор c, у которого первая компонента $c_1 = 0$, а $c_k = b_{k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n+1$. Таким образом, справедлива

Лемма 3. Система уравнений (10) может быть записана в виде $W_{n+1} c = \Delta$. Причем последнее уравнение имеет вид: $\sum_{k=1}^{n} b_k k^n = d$, где d — пока неопределенная константа. Отсюда $c = W_{n+1}^{-1} \Delta$, т. е.

$$c_k = \sum_{l=1}^{n+1} (W_{n+1}^{-1})_{kl} \Delta_l = (W_{n+1}^{-1})_{k,\,1} + d\,(W_{n+1}^{-1})_{k,\,n+1}.$$

$$c_1 = 1 + d(-1)^n / n!, \quad c_{k+1} = d\,(-1)^{n+k} / k!\,(n-k)! \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Но по определению $c_1 = 0$, поэтому $d = (-1)^{n+1} n!$.

Таким образом, справедливы

Следствие 11.

$$b_k = (-1)^{1+k} C_n^k.$$

Следствие 12.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k k^n = (-1)^n n!.$$

Введем в рассмотрение $(n+1)\times(m+1)$ — матрицы C и D с элементами $C_{11}=0$, $C_{l,k}=b_{l-1,k-1}$ для остальных значений индексов

$$D_{l,k} = \delta_{1lk} + d\delta_{l,n+1}\,\delta_{k,m+1},\quad 1\leqslant l\leqslant n+1,\ 1\leqslant k\leqslant m+1.$$

Таким образом, матрица D имеет только два элемента, отличных от нуля: первый элемент в первой строке (он равен 1) и последний элемент в последней строке (он равен d). Здесь d — пока неопределенная константа, соответствующая равенству

$$d = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} l^n k^m b_{l,k}.$$

Использование этих обозначений позволяет убедиться, что справедлива

Лемма 4. Система уравнений (19) может быть записана в следующей матричной форме:

$$W_{n+1}\, C W'_{m+1} = D.$$

Здесь W_{n+1}, W_{m+1} — матрицы Вандермонда порядка $(n+1)$ и $(m+1)$ соответственно с элементами $W_{ij}=(j-1)^{i-1}$. $(W_{11}=1)$.

Решение полученного матричного уравнения имеет вид:

$$C = W_{n+1}^{-1} D (W_{m+1}^{*})^{-1}.$$

Используя конкретную структуру матрицы D, получаем элементы матрицы C в следующем виде:

$$c_{l,k} = (W_{n+1}^{-1})_{l,1} (W_{m+1}^{-1})_{k,1} + d\,(W_{n+1}^{-1})_{l,n+1} (W_{m+1}^{-1})_{k,m+1}.$$

Из того, что $c_{11}=0$, а также из следствий 9 и 10, получаем, что

$$d = -\frac{(W_{n+1}^{-1})_{11}(W_{m+1}^{-1})_{11}}{(W_{n+1}^{-1})_{1,n+1}(W_{m+1}^{-1})_{1,m+1}} = (-1)^{1+n+m} n!\, m!.$$

Таким образом, оказывается справедливым

Следствие 13. Коэффициенты $b_{l,k}$, удовлетворяющие системе (19), определяются формулами

$$b_{l,k} = (-1)^{1+l+k} C_n^l C_m^k,$$

если l и k одновременно не равны нулю.

Следствие 14.

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} l^n k^m b_{l,k} = (-1)^{1+n+m} n! m!.$$

Вернемся теперь к рассмотрению матрицы Вандермонда W_n с элементами $(W_n)_{ij} = r_j^{i-1}$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. Введем обозначения

$$G_{0,n}^{(k)} = 1,$$

$$G_{l,n}^{(k)} = \sum\nolimits^{(l,k)} \prod_{j=1}^{l} r_{i_j},\quad 1\leqslant l\leqslant n-1.$$

Здесь $\sum^{(l,k)}$ обозначает сумму по всем наборам индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$, удовлетворяющих условиям $(1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_l\leqslant n;\ i_j\neq k,\ 1\leqslant j\leqslant l)$. Как и раньше через $A_{j,k}$ будем обозначать алгебраическое дополнение

к элементу определителя Вандермонда $\det W_n$ с индексами (j, k). Тогда справедлива

Лемма 5. Алгебраическое дополнение элемента $(W_n)_{lk}$ в определителе Вандермонда имеет вид:

$$A_{l,k} = (-1)^{n-l} G_{n-l,n}^{(k)} A_{n,k},$$

где $A_{n,k}$ находится по лемме 2.

Доказательство леммы проводится непосредственным вычислением.

Следствие 15. Матрица W_n^{-1}, обратная матрице Вандермонда W_n, имеет элементы

$$(W_n^{-1})_{k,n-l} = (-1)^{n+k+l} \sum\nolimits^{(l,k)} \prod_{j=1}^{l} r_{i_j} \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k)\right),$$

$$1 \leqslant l \leqslant n-1, \; 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Элементы последнего столбца матрицы W_n^{-1} определяются следствием 4.

Список литературы

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М., 1974.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1978.

Поступила в редакцию 08.04.91.

УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ ОЦЕНОК МИНИМАЛЬНОГО КОНТРАСТА

1. Введение. Математическая модель. В теории статистического оценивания параметров известно [1, 2] семейство оценок минимального контраста (МК), включающее как частные случаи широко применяемые на практике оценки максимального правдоподобия (ОМП), М-оценки [3, 4], МНК-оценки. Пусть в R^p определено m-параметрическое семейство F плотностей вероятностных распределений

$$F = \{f(x, \theta),\ x \in R^p : \theta \in \Theta \subseteq R^m\},$$

где Θ — открытое множество. Наблюдается случайная выборка $X = \{x_i : i = \overline{1, n}\} \subset R^p$ объема n из распределения $f(\cdot, \theta^0)$ с неизвестным значением $\theta^0 \in \Theta$. МК-оценка $\hat{\theta} = T(X)$ определяется соотношениями [1]:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta \in \Theta^c} L(\theta), \quad L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i, \theta)/n, \tag{1}$$

где Θ^c — замыкание Θ; $g(x, \theta)$ — функция контраста, такая, что $E_{\theta^0}\{g(x, \theta_0)\} < E_{\theta^0}\{g(x, \theta)\}$ $\forall \theta \neq \theta^0$, $\theta \in \Theta^c$; $E_{\theta^0}\{\cdot\}$ — символ математического ожидания по распределению $f(\cdot, \theta^0)$.

Асимптотический (при $n \to \infty$) анализ МК-оценок для вышеописанной модели проведен в [1, 2]. Однако на практике модельные предположения часто нарушаются [3, 4]: выборка X соответствует «ε-искаженному» распределению $p_\varepsilon(\cdot) \neq f(\cdot, \theta^0)$, теряются оптимальные свойства МК-оценок и актуальны задачи анализа и синтеза робастных (устойчивых) оценок [3, 4]. В настоящей статье для асимптотического ($n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$) анализа робастности МК-оценок развивается метод асимптотических разложений [1, 5, 6].

2. Случай параметрических искажений Хубера. Пусть в R^p наблюдается «ε-засоренная» выборка X из ε-смеси распределений с плотностью: