УДК 517.94

П. П. ЗАБРЕЙКО

С-ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Хорошо известно, что первоначальные результаты по теории интегральных уравнений относились к непрерывным решениям линейных интегральных уравнений второго рода или, как принято говорить, к **C**-теории этих уравнений. В этой связи значительная часть монографий и учебников по теории интегральных уравнений посвящена **C**-теории (см., напр., [1—8]). Однако изложение этой теории в упомянутых и других книгах проведено при упрощающих специальных дополнительных ограничениях, не связанных с существом дела. Типичными из этих дополнительных предположений являются непрерывность ядра или наличие у него лишь так называемых слабых особенностей и др. Возникает естественный вопрос об установлении основных фактов теории интегральных уравнений при минимальных ограничениях на его ядро. При этом следует отметить, что непосредственное использование абстрактной теории линейных операторных уравнений здесь невозможно по той причине, что ее применение связано с анализом сопряженного уравнения, которое в рассматриваемом случае оказывается уравнением в пространстве функций ограниченной вариации (в скалярном случае) или подходящем пространстве ограниченных мер (в общем случае); анализ уравнений в этих пространствах связан со значительными техническими трудностями.

Попытаемся изложить основные факты **C**-теории линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода на основе, с одной стороны, теории Рисса — Шаудера компактных линейных операторов в банаховых пространствах и, с другой стороны, современной теории интегральных операторов. В короткой статье, конечно, невозможно затронуть все аспекты рассматриваемой теории, поэтому ограничимся вопросом о справедливости классических теорем Фредгольма для таких уравнений, включая теоремы об интегральном представлении их решений. За рамками статьи остались вопросы, связанные с детерминантами Фредгольма и теория некоторых специальных классов интегральных уравнений (напр., с осцилляционными ядрами).

1. Пусть Ω — компактное метрическое пространство, A — некоторая σ-алгебра его подмножеств (называемых, как обычно, измеримыми), на которой задана конечная счетно аддитивная мера μ; предполагается, что любое компактное множество Ω измеримо и что измеримое множество с любой степенью точности по мере может быть аппроксимировано компактными подмножествами Ω. Типичными примерами этой ситуации являются отрезок $\Omega=[a, b]$, ограниченная замкнутая область Ω в конечномерном пространстве, натуральный ряд или произвольное счетное множество, компактизированное «бесконечностью» ∞ с соответствующей метрикой и с дискретной мерой (последний случай позволяет охватить бесконечные системы линейных уравнений) и т. д. Через **C** обозначим пространство Чебышева вещественных или комплексных непрерывных на Ω функций, а через $\mathbf{L}_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ — пространство Лебега интегрируемых со степенью p при $p<\infty$ и ограниченных в существенном при $p=\infty$ вещественных или комплексных функций.

Нас интересует уравнение Фредгольма второго рода

$$\lambda x(t)-\int\limits_{\Omega} k(t, s)\, x(s)\, ds=f(t) \tag{1}$$

вместе с соответствующим однородным уравнением

$$\lambda x(t)-\int\limits_{\Omega} k(t, s)\, x(s)\, ds=0 \tag{2}$$

и транспонированным уравнением

$$\lambda y(t) - \int_{\Omega} k^*(t, s)\, y(s)\, dt = 0, \tag{3}$$

где

$$k^*(t, s) = \overline{k(s, t)}. \tag{4}$$

Предполагается, что ядро $k(t, s)$ измеримо по совокупности переменных. Основную роль при этом играют довольно тонкие свойства линейного интегрального оператора

$$Kx(t) = \int_{\Omega} k(t, s)\, x(s)\, ds \tag{5}$$

и транспонированного к нему линейного интегрального оператора

$$K^{\circ}x(t) = \int_{\Omega} k^*(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{6}$$

Соответствующие предположения, однако, удобнее формулировать непосредственно в терминах ядра $k(t, s)$ или, что эквивалентно, определенной на Ω и принимающей значения в пространстве $\mathbf{S}$ измеримых на Ω функций вектор-функции

$$\underline{\mathbf{k}}(t) = k(t, s). \tag{7}$$

Примем следующие обозначения: $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{X}$ в банахово пространство $\mathbf{Y}$; $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathrm{com})$ и $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathrm{wcom})$ — пространство компактных и соответственно слабо компактных линейных операторов, $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathrm{ws})$ — усиленно непрерывных (т. е. преобразующих слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся) операторов.

В дальнейшем основную роль играют приводимые ниже леммы. Часть приведенных в них результатов хорошо известна (см., напр., [9—11]).

Лемма 1. *Справедливы следующие включения:*

$$L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{com}) \subset L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{wcom}) = L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{ws}) = L(\mathbf{L}_\infty, \mathbf{C}) \subset$$
$$\subset L(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \subset L(\mathbf{L}_\infty, \mathbf{L}_\infty). \tag{8}$$

При этом $L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{com})$ *и* $L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{wcom})$ *являются идеалами и, кроме того, произведение двух операторов из* $L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{wcom})$ *является оператором из* $L(\mathbf{C}, \mathbf{C}, \mathrm{com})$.

Лемма 2. *Линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5), действует в пространстве $\mathbf{C}$ в том и только том случае, когда соответствующая ему функция $\underline{\mathbf{k}}(t)$, определенная равенством (7), является $\mathbf{C}$-слабо непрерывной вектор-функцией из Ω в $\mathbf{L}_1$. При этом оператор K является непрерывным и*

$$\| K \| = \sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} | k(t, s) |\, ds; \tag{9}$$

кроме того, сопряженный к K оператор K^* оставляет $\mathbf{L}_1$ инвариантным и сужение этого оператора на $\mathbf{L}_1$ совпадает с транспонированным к K оператором K°, определенным равенством (6).

Условие $\mathbf{C}$-слабой непрерывности вектор-функции $k(t)$, определенной равенством (7), в частности, влечет за собой неравенство (8) или, иными словами, принадлежность ядра $k(t, s)$ пространству $Z(\Omega)$ измеримых по совокупности переменных функций $z(t, s)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\| z(t, s) \|_Z = \sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} | z(t, s) |\, ds. \tag{10}$$

Однако принадлежность ядра $k(t, s)$ этому пространству далеко не достаточна для $\mathbf{C}$-слабой непрерывности функции $k(t)$. В настоящее время условие $\mathbf{C}$-слабой непрерывности детально изучено лишь в самом простом случае, когда $\Omega=[a, b]$; именно для этого известны [12] достаточно тонкие, но простые и удобные критерии **C**-слабой непрерывности функции Ф. Рисса, Г. М. Фихтенгольца, А. Н. Колмогорова.

Лемма 3. *Линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5), действует в пространстве* **C** *и является слабо компактным в том и только том случае, когда соответствующая ему функция $k(t)$, определенная равенством (7), является $\mathbf{L}_\infty$-слабо непрерывной вектор-функцией из Ω в $\mathbf{L}_1$.*

В отличие от условия **C**-слабой непрерывности функции $\mathbf{k}(t) = k(t, s)$ условие ее $\mathbf{L}_\infty$-слабой непрерывности проверяется сравнительно просто. Оно означает, что $k(t, s) \in Z(\Omega)$ и, кроме того, каждая из функций

$$K\chi_D(t) = \int\limits_D k(t, s)\, ds \quad (D \in \mathrm{A}) \tag{11}$$

($\chi_D(t)$ — характеристическая функция множества $D \in \mathrm{A}$) непрерывна.

Лемма 4. *Линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5), является компактным в пространстве* **C** *в том и только том случае, когда соответствующая ему функция $\mathbf{k}(t)$, определенная равенством (7), является непрерывной вектор-функцией из Ω в $\mathbf{L}_1$.*

Последнее условие формулируется уже совсем просто: оно означает, что

$$\lim_{t \to t_0} \int\limits_\Omega |k(t, s) - k(t_0, s)|\, ds = 0 \quad (t^0 \in \Omega). \tag{12}$$

Для любых двух функций $m(t, s)$ и $n(t, s)$ из $Z(\Omega)$ определена их свертка $m * n(t, s)$:

$$m * n(t, s) = \int\limits_\Omega m(t, \xi)\, n(\xi, s)\, d\xi, \tag{13}$$

также являющаяся функцией из $Z(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть линейный интегральный оператор M с ядром $m(t, s)$ и линейный интегральный оператор N с ядром $n(t, s)$ действуют в пространстве* **C**. *Тогда действующий в* **C** *линейный оператор MN является интегральным оператором с ядром $m * n(t, s)$.*

2. Будем говорить, что для уравнения (1) справедливы *теоремы Фредгольма*, если для него справедливы следующие утверждения:

a) Спектр $\mathrm{sp}K$ линейного интегрального оператора K, определенного равенством (5), является или конечным, или счетным множеством с единственной предельной точкой 0.

b) Для каждого $\lambda \in \mathrm{sp}\, K / \{0\}$ однородные уравнения (2) и (3) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений соответственно в **C** и в $\mathbf{L}_1$.

c) Для каждого $\lambda \in \mathrm{sp}\, K / \{0\}$ уравнение (1) имеет непрерывные решения в том и только том случае, когда его правая часть $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_\Omega f(t)\, \overline{h_j(t)\, dt} = 0 \quad (j = 1, \ \ldots, \ m); \tag{14}$$

эти решения имеют вид:

$$x(t) = x_0(t) + c_1 e_1(t) + \ldots + c_m e_m(t), \tag{15}$$

где $x_0(t)$ — некоторое решение уравнения (1), а $c_1, \ldots, c_m$ — произвольные постоянные; здесь $e_1(t), \ldots, e_m(t)$ и $h_1(t), \ldots, h_m(t)$ — все линейно независимые решения уравнений (2) и (3) соответственно в **C** и в $\mathbf{L}_1$.

Теорема 1. *Пусть линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5), слабо компактен. Тогда для уравнения (1) справедливы теоремы Фредгольма.*

Подчеркнем, что теорема 1 непосредственно из соответствующей теоремы Рисса — Шаудера не вытекает (прежде всего потому, что $\mathbf{L}_1$ не совпадает с сопряженным к **C** пространством).

Обозначим через $\Lambda(K)$ множество точек λ комплексной плоскости, для которых $\lambda^{-1} \notin \mathrm{sp}K$, а через $\Lambda_0(K)$ — его компоненту связности, содержащую нуль; эта компонента содержит открытый круг $\Lambda_C(K) = \{\lambda: |\lambda| < (\rho(K))^{-1}\}$, где $\rho(K)$ — спектральный радиус оператора K, определенный равенством

$$\rho(K) = \lim_{n\to\infty} (\|K^n\|)^{1/n}. \tag{16}$$

Как известно, в $\Lambda(K)$ определена аналитическая функция $L(\lambda, K) = K(I-\lambda K)^{-1}$, называемая *резольвентой Фредгольма,* связанная с резольвентой Гильберта $R(\lambda, K)$ простыми равенствами

$$R(\lambda, K) = \lambda^{-1} I + \lambda^{-2} L(\lambda^{-1}, K), \ L(\lambda, K) = \lambda^{-1} KR(\lambda^{-1}, K). \tag{17}$$

При естественных ограничениях резольвента Фредгольма оказывается интегральным оператором, что позволяет при соответствующих значениях λ, $\lambda^{-1} \notin \mathrm{sp}K$ записывать решения $x(t)$ уравнения (1) в виде:

$$x(t) = \lambda^{-1} f(t) - \lambda^{-2} \int\limits_\Omega l(\lambda^{-1};\ t,\ s) f(s)\, ds; \tag{18}$$

здесь $l(\lambda; t, s)$ — ядро оператора $L(\lambda, K)$.

Теорема 2. *Пусть линейный интегральный оператор K, определенный равенством* (5), *действует в пространстве* **C**. *Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda_0(K)$ оператор $L(\lambda, K)$ допускает интегральное представление:*

$$L(\lambda, K) f(t) = \int\limits_\Omega l(\lambda, t, s) f(s)\, ds \tag{19}$$

с ядром $l(\lambda, t, s) \in Z(\Omega)$. Это ядро при $\lambda \in \Lambda_c(K)$ определяется равенством

$$l(\lambda, t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k^{(n)}(t, s), \tag{20}$$

где $k^{(n)}(t, s)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — итерированные ядра, определенные формулами

$$k^{(1)}(t, s) = k(t, s),\ k^{(n+1)}(t, s = k^{(n)} * k(t, s)\ (n = 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

при этом ряд (20) сходится по норме пространства $Z(\Omega)$.

Если в условиях теоремы 2 интегральный оператор K слабо компактен, то $\Lambda_0(K) = \Lambda(K)$ и оператор $L(\lambda, K)$ является слабо компактным интегральным оператором при всех $\lambda \in \Lambda(K)$.

3. В теории интегральных уравнений важную роль играют различные утверждения об интегральных уравнениях с ядрами, удовлетворяющими специальным условиям. Остановимся на некоторых из них.

Напомним, что в случае $\Omega = [a, b]$ ядро $k(t, s)$ называется *ядром Вольтерра*, если $k(t, s) = 0$ при $s > t$. В общем случае будем называть ядро $k(t, s)$ *ядром Вольтерра*, если в Ω задано семейство замкнутых множеств $\{\Omega(t):\ t \in \Omega\}$, обладающее следующими свойствами: (a) для каждого $\delta > 0$ существует такое конечное множество $\Omega(\delta) = \{t_1, \ldots, t_m\}$, что

$$\mu(\Omega(t_{j-1}) \Delta \Omega(t_j)) < \delta \ (j = 1, \ldots, m,\ \Omega_0 = \varnothing),\ \bigcup_{j=1}^{m} \Omega(t_j) = \Omega;$$

(b) $k(t, s) = 0$ при $s \notin \Omega(t)$. Классическая теорема Вольтерра может быть обобщена следующим образом.

Теорема 3. *Пусть линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5), с ядром Вольтерра $k(t, s)$ действует в пространстве* **C** *и слабо компактен. Тогда $\rho(K) = 0$.*

Рассмотрим случай симметричного ядра: $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$. Для интегральных уравнений с такими ядрами при дополнительном условии, что это ядро интегрируемо с квадратом, справедливы классические теоремы

Гильберта — Шмидта, являющиеся частным случаем спектральной теоремы для компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Ядро действующего в пространстве **C** линейного интегрального оператора не обязательно интегрируемо с квадратом. Однако верно следующее утверждение, позволяющее существенно расширить область применения теории Гильберта — Шмидта.

Теорема 4. *Пусть линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5), с симметричным ядром $k(t, s)$ действует в пространстве* **C**. *Тогда он как оператор в* $\mathbf{L}_2$ *является непрерывным самосопряженным оператором. Более того, если K как оператор в* **C** *слабо компактен, то как оператор в* $\mathbf{L}_2$ *он компактен и его собственные функции, отвечающие ненулевым собственным значениям, непрерывны.*

Отметим, что даже в случае компактного в **C** оператора K для уравнения (1) возможна ситуация, когда интегральное уравнение (1) с $\lambda=0$ не имеет ненулевых решений в **C**, однако имеет их в $\mathbf{L}_2$, или когда оно не имеет ненулевых решений в $\mathbf{L}_2$, но имеет их в $\mathbf{L}_1$. При анализе таких уравнений полезна общая теория ортогональных рядов (см., напр., [13]).

Остановимся еще на интегральных уравнениях с неотрицательными ядрами: $k(t, s)\geqslant 0$. Для таких операторов типичными являются условия положительности спектрального радиуса. Будем говорить, что ядро $k(t, s)$ является *невырожденным*, если хотя бы одна из функций

$$k(s_0, s_1)k(s_1, s_2)\ \ldots\ k(s_{n-1}, s_n)k(s_n, s_0)\quad (n=1, 2, \ldots) \tag{20}$$

не эквивалентна нулю.

Теорема 5. *Пусть линейный интегральный оператор K, определенный равенством (5),с неотрицательным ядром $k(t, s)$ действует в пространстве* **C**. *Тогда его спектральный радиус $\rho(K)$ положителен, если его ядро является невырожденным. Если оператор K слабо компактен, то его спектральный радиус положителен в том и только том случае, когда его ядро невырожденно; при этом существует, по крайней мере, одно ненулевое неотрицательное непрерывное решение $e(t)$ уравнения (2) и, по крайней мере, одно ненулевое неотрицательное интегрируемое решение $h(t)$ уравнения (3) с $\lambda=\rho(K)$.*

4. Изложенная теория легко может быть модифицирована на случай, когда пространство **C** рассматривается как совокупность классов эквивалентных друг другу измеримых функций, в каждом из которых есть непрерывная функция. Изложенная теория может быть также модифицирована в $\mathbf{L}_\infty$- и $\mathbf{L}_1$-теории; впрочем, ситуация в этом случае является значительно более простой, так как сопряженным к пространству $\mathbf{L}_1$ является пространство $\mathbf{L}_\infty$ и здесь возможно прямое использование теорем Хаусдорфа о сопряженных операторах.

Список литературы

1. Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л., 1934. Т. 3. Ч. 2.
2. Ловитт У. Линейные интегральные уравнения. М., 1957.
3. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.. 1959.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М., 1951.
5. Привалов И. И. Интегральные уравнения. М.; Л., 1935.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 4. Кн. 1.
7. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960.
8. Интегральные уравнения (СМБ). М., 1966.
9. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Общая теория. М., 1966.
10. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский Е. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
12. Гливенко В. И. Интеграл Стильтьеса. М., Л., 1936.
13. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., 1958.

Поступила в редакцию 22.03.91.