Физика

УДК 535.343.2; 535.548; 538.951-405; 539.219.3

Ф. И. ФЕДОРОВ, Л. М. БАРКОВСКИЙ

ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ КОШИ В ОПТИКЕ И АКУСТИКЕ КРИСТАЛЛОВ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-групповые методы широко применяются для исследования физических систем. В частности, используется метод теории групп и алгебр Ли. В электродинамике групповые методы впервые применил Пуанкаре, установив групповую структуру преобразований Лоренца и введя группу преобразований поляризации света, изображаемую сферой Пуанкаре [1—3]. Симметрийные исследования уравнений Максвелла в вакууме производились рядом авторов [4, 5]. Однако исследованию симметрий уравнений оптики и акустики с учетом анизотропии, т. е. различных уравнений связи, почти не уделено внимания. Эти уравнения определяют функции отклика материальной среды на внешние электромагнитные или механические воздействия. Сюда относятся, например, такие характеристики среды и поля в ней, как операторы диэлектрической и магнитной проницаемостей, операторы модулей упругости, гирационные операторы и др. [6—10]. Эти операторы обладают рядом общих свойств, выводимых из таких фундаментальных принципов, как симметрия, причинность, устойчивость и т. д. без использования микроскопических моделей среды. Они тесно связаны с операторами рассеяния волн [11]. Соотношения, описывающие эти свойства, привлекают пристальное внимание занимающихся линейной и нелинейной электродинамикой и акустикой. Вскрываются все новые некорректности, неточности ряда утверждений, относящихся к таким свойствам. Это касается, например, гиротропных пространственно-диспергирующих сред [7, 9, 10] и ряда других случаев (см. [12]). Новые подходы требуются для описания усиливающих и нелинейных сред. Обнаружение способности многих физических систем к самоорганизации, существование эффектов обращения волновых фронтов, сжатия состояний, оптической и акустической бистабильности и др. требуют разработки описания, базирующегося на симметрийном анализе.

В настоящей статье, являющейся в основном обзором работ [9, 10, 13—17], рассматриваются операторы Коши для волновых уравнений кристаллооптики и кристаллоакустики. В работах по оптике и акустике тот факт, что решения соответствующих уравнений обладают групповыми свойствами, до недавнего времени оставался в тени. Между тем его учет позволяет производить систематизацию их волновых свойств.

Векторная природа электромагнитного поля и поля смещений упругих волн естественно приводит к применению методов функционального анализа. Давно установлена глубокая аналогия между векторами (точками в линейном пространстве) и функциями (точками в функциональном пространстве). Явления дисперсии, анизотропии, гиротропии, дихроизма, отражения, преломления, дифракции, рефракции и др. описываются на языке спектральных разложений волновых операторов. Среди последних важную роль играют операторы Коши, представляемые в ряде случаев операторными экспонентами.

Давно известна форма представления ряда Тейлора в символическом (операторном) виде:

$$f(x+h) = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} f(x) = T_h f(x), \tag{1}$$

где используется формальное разложение в ряд операторной экспоненты

$$T_h = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}. \tag{2}$$

Оператор (1), (2) является оператором сдвига [11]. Большинство линейных операторов, используемых в гармоническом анализе, связано с линейными операторами сдвига T_h, которые обладают групповыми свойствами

$$T_0 = 1,\ T_{a+b} = T_a T_b,\ T_{-a} = T_a^{-1}. \tag{3}$$

Если T_a имеет инвариантные подпространства $\mathbf{u}_i$, то можно рассматривать его действие на каждом $\mathbf{u}_i$ отдельно. Каждое одномерное инвариантное подпространство $\mathbf{u}$ порождается функцией f, которая служит совместным собственным вектором всех T_a.

1. Тензорные дисперсионные уравнения

Уравнения Максвелла для электромагнитных векторных волн $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(\zeta)e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\zeta)e^{-i\omega t}$, где $\zeta = \mathbf{rn}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой (фазовой) нормали, имеют вид:

$$\mathbf{n}^{\times}\frac{d\mathbf{H}}{d\zeta} = ik_0\mathbf{D} = 0,\ \ \mathbf{n}^{\times}\frac{d\mathbf{E}}{d\zeta} - ik_0\mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{n}^{\times}$ — антисимметричный тензор, дуальный вектору $\mathbf{n}$; $k_0 = \frac{\omega}{c}$; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — индукции электрического и магнитного полей. При наличии уравнений связи $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ из (4) следует уравнение (см. [13—15]):

$$\mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times}\frac{d^2\mathbf{H}}{d\zeta^2} + k_0\mu\mathbf{H} = 0. \tag{5}$$

Аналогично для упругих волн $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\zeta)e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u}$ — вектор смещения частиц среды) получаются уравнения [15]:

$$\Lambda\frac{d^2\mathbf{u}}{d\zeta^2} + \omega^2\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Здесь $(\Lambda)_{ac} = \frac{1}{\rho}c_{abcd}n_b n_d$, а $\frac{1}{\rho}c_{abcd}$ — приведенный тензор модулей упругости [8], ρ — плотность среды. Уравнения (5) (и аналогичные уравнения для $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$) так же, как (6) имеют общую форму:

$$\alpha\frac{d^2\mathbf{F}}{d\zeta^2} + \varkappa^2\mathbf{F} = 0, \tag{7}$$

где α — некоторый тензор; $\varkappa$ — скалярная постоянная. При этом следует учитывать, что в случае (5) детерминант $|\alpha| = 0$, а в случае (6) $|\alpha| \neq 0$. Поэтому в последнем случае существует обратный тензор α^{-1} и уравнение (7) может быть записано в виде:

$$d^2\mathbf{F}/d\zeta^2 = -\varkappa^2\alpha^{-1}\mathbf{F}. \tag{8}$$

Как известно, линейные дифференциальные уравнения вида $d\mathbf{F}/d\zeta = \varkappa\mathbf{F}$ или $d^2\mathbf{F}/d\zeta^2 = \varkappa\mathbf{F}$, где $\varkappa$ — постоянное число, имеют соответственно решения $\mathbf{F} = \mathbf{C}e^{\varkappa\zeta}$ или

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_+ e^{\sqrt{\varkappa}\zeta} + \mathbf{C}_- e^{-\sqrt{\varkappa}\zeta}, \tag{9}$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{\pm}$ — произвольные постоянные векторы. Аналогично могут быть написаны и решения уравнений типа (8):

$$\mathbf{F} = e^{\pm i\varkappa\beta\zeta}\,\mathbf{F}_0, \quad \beta = \sqrt{\alpha^{-1}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{F}_0$ — произвольный постоянный вектор, а в экспоненте стоит квадратный корень из матрицы, т. е. матрица β, удовлетворяющая соотношению $\beta^2 = \alpha^{-1}$. Экспоненциальный оператор в формуле (10) удовлетворяет групповым условиям (3) и является примером оператора Коши. Такие операторы описывают решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [24] и в литературе иногда называются пропагаторами.

Для любой матрицы, не имеющей кратных собственных значений (и, следовательно, приводимой к диагональному виду), квадратный корень определяется просто. Если

$$A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} S^{-1}, \tag{11}$$

то

$$\sqrt{A} = S\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \pm\sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}, \tag{12}$$

где S — матрица, преобразующая A к диагональной форме. Поскольку возможны все сочетания знаков, то $\sqrt{A}$ имеет 2^n различных значений. Выбор возможных значений β в решении (10) должен производиться на основании граничных или иных условий.

Уравнение типа (8) можно получить из (7) и в том случае, когда α — особенная матрица ($|\alpha| = 0$). Хотя при этом не существует обратная матрица α^{-1}, однако вместо нее можно взять псевдообратную матрицу α^{-} (см. [18]), и соответственно в выражении (10) для $\mathbf{F}$ будем иметь $\beta = \sqrt{\alpha^{-}}$. Для трехмерных тензоров с одним нулевым собственным значением в [19] даны ковариантные алгоритмы псевдообращения и извлечения квадратного корня. Ковариантный алгоритм псевдообращения в общем случае любых квадратных матриц изложен в [20]. В результате мы в любом случае приходим к общему выводу: для плоских монохроматических волн, как электромагнитных, так и упругих, в произвольной среде векторы, характеризующие волновое поле, должны выражаться в универсальной форме вида (10):

$$\mathbf{F}(t, \zeta) = e^{i(\omega t - \varkappa N\zeta)}\,\mathbf{F}_0, \tag{13}$$

где N — некоторый тензор; $\varkappa = k_0 = \omega/c$ для электромагнитных волн и $\varkappa = \alpha\sqrt{\rho}$ для упругих волн. Соотношение, определяющее тензор N, получается при подстановке выражения (13) в уравнение (7) и имеет вид:

$$\alpha N^2 - 1 = 0. \tag{14}$$

В случаях (5), (6) матрица α соответственно равна $\mu^{-1}\mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times}$ или $c_{abcd}n_b n_d$.

Если сравнить (13) с общепринятым в литературе выражением, например, для вектора магнитного поля плоской волны: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\, e^{i\omega\left(t - \frac{1}{c}n\zeta\right)}$ где n — показатель преломления, то различие сведется к тому, что вместо скаляра n появляется тензор N. Естественно поэтому назвать N тензором показателей преломления. Этот тензор был введен в работах [21, 22, 9]. В одноосных средах тензор N имеет следующую спектральную форму:

$$N = n_e\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} + n_0\,[\mathbf{n}\,\mathbf{e}]\cdot[\mathbf{n}\,\mathbf{e}], \quad \mathbf{e} = \frac{[\mathbf{n}\,\mathbf{c}]}{|[\mathbf{n}\,\mathbf{c}]|}, \tag{15}$$

где $\mathbf{c}$ — единичный вектор оптической оси,

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_0},\ n_e = \left\{\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_e}{\varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0)\,(\mathbf{n}\,\mathbf{c})^2}\right\}^{1/2} \tag{16}$$

— показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн [6, 7]. Точки между векторами в (15) обозначают диады, являющиеся поляризационными проекторами соответствующих волн [25].

Уравнение, связывающее показатель преломления с параметрами среды, обычно называют дисперсионным уравнением. Для электромагнитных волн в изотропной среде оно выражается соотношением Максвелла $n^2 - \varepsilon\mu = 0$, в котором фигурируют только скалярные величины *). В кристаллах дисперсионное уравнение, полученное впервые Френелем и часто называемое «уравнением нормалей» [6, 7], имеет более сложный вид. Общая ковариантная форма дисперсионного уравнения в произвольных кристаллах, где вместо скалярного показателя преломления фигурирует вектор рефракции $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ в общем случае комплексный, была получена в работе [23] (см. также монографии [6—8]). Введение вектора рефракции [23] позволило связать воедино такие фундаментальные характеристики плоской волны, как показатель преломления, коэффициент затухания, направления фазовой и амплитудной нормалей. Однако дисперсионное уравнение оставалось скалярным уравнением для вектора $\mathbf{m}$.

Примененный в [9, 10, 13—17] подход представляет собой дальнейший шаг в направлении объединения характеристик плоских волн, распространяющихся в произвольных средах. Поскольку вместо скалярного показателя преломления вводится тензор показателей преломления N, то и дисперсионное уравнение [14] по необходимости приобретает тензорный характер. Преимущество такого подхода состоит в том, что оператор (тензор) показателей преломления N описывает сразу обе изонормальные собственные электромагнитные волны, возникающие в анизотропной среде (или три такие волны в случае упругих волн), т. е. все волновое поле, соответствующее заданному $\mathbf{n}$.

Очевидно, наличие тензора N в экспоненте формулы (13) означает, что фаза

$$\varphi = \omega t - \varkappa N \zeta \tag{17}$$

приобретает операторный характер. Таким образом, введение тензора показателей преломления естественно влечет за собой введение понятия операторной фазы.

Из формулы (13) при $t=0$, $\zeta=0$ следует, что $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(0,\ 0)$, таким образом, в общем случае

$$\mathbf{F}(t,\ \zeta) = e^{i(\omega t - \varkappa\zeta N)}\,\mathbf{F}(0,\ 0). \tag{18}$$

Отсюда ясно, что полученное решение имеет эволюционный характер, т. е. значение поля в точке ζ в момент t определяется из его начального значения при $t=0$, $\zeta=0$ путем действия эволюционного оператора σ (оператора Коши [24]):

$$\mathbf{F}(t,\ \zeta) = \sigma(t,\ \zeta)\,\mathbf{F}(0,\ 0),\ \ \sigma(t,\ \zeta) = \exp(i\ \ \varphi). \tag{19}$$

Поскольку начальный вектор $\mathbf{F}_0$ может быть любым, то формула (19) относится к общему случаю распространения плосковолновых полей в анизотропной среде.

Для стационарных (ε, μ, Λ — постоянны) однородных сред операторные решения (19) можно записать в виде:

$$\mathbf{F}(\zeta,\ t) = (e^{ik_0 N\zeta}\,\mathbf{a} + e^{-ik_0 N\zeta}\,\mathbf{b})\,e^{i\omega t}. \tag{20}$$

Под N в (20) подразумевается ветвь корня уравнения (14), относящаяся к волнам, распространяющимся в одном и том же направлении $\mathbf{n}$. Здесь N — тензоры второго ранга, а векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяются из начальных условий при $\zeta=0$.

* Строго говоря, оптические свойства изотропной среды, ввиду наличия выделенного направления $\mathbf{n}$, также характеризуются не скаляром n, а тензором N (см. [16]).

В предположении, что векторы $\mathbf{F}(0)$ и $(\partial\mathbf{F}/\partial\zeta)_{\zeta=0}$ известны, находим:

$$\mathbf{F}(\zeta) = G_1(\zeta)\,\mathbf{F}_0 + G_2(\zeta)\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}, \tag{21}$$

де

$$G_1(\zeta) = \frac{\partial G_2(\zeta)}{\delta\zeta} = \cos(k_0 N\zeta),\ G_2(\zeta) = \frac{1}{k_0}\sin(k_0 N\zeta)\,N^{-1} \tag{22}$$

— функции Грина (пропагаторы). Производные

$$\left.\frac{\delta\mathbf{F}(\zeta)}{\delta\mathbf{F}(0)}\right|_{\mathbf{F}'(0)} = G_1(\zeta),\ \left.\frac{\delta\mathbf{F}(\zeta)}{\delta\mathbf{F}'(0)}\right|_{\mathbf{F}(0)} = G_2(\zeta) \tag{23}$$

являются тензорами и характеризуют зависимость решений (20), (21) от начальных условий в точке $\zeta=0$. Если $\mathbf{F}'(0) = (\partial\mathbf{F}/\partial\zeta)_{\zeta=0} = ik_0N\mathbf{F}(0)$, то $\mathbf{b}=0$ и имеем одно условие

$$\frac{\delta\mathbf{F}(\zeta)}{\delta\mathbf{F}(0)} = e^{ik_0N\zeta} = \cos(k_0N\zeta) + i\sin(k_0N\zeta). \tag{24}$$

Тензор $N = N' + iN''$ может быть назван также оператором адмитанса и диссипативен при [16] условии $\frac{1}{2i}(N - N^{+}) = N'' \leqslant 0$.

Операторы Коши $\sigma^{(+)} = \exp[i\omega\rho(\zeta_2 - \zeta_1)]$ при вещественных положительных $\omega\rho(\zeta_2+\zeta_1)$ (однородные волны) являются сжатиями, т. е. $\|\sigma^{(+)}\| \leqslant 1$. В недиссипативных средах $N = N^{+}$.

В ряде задач удобно использовать пространственно однородные (осцилляторные) представления полей в анизотропной среде, когда заданным считается волновой вектор $\mathbf{k}$ [21].

Уравнения (7), (8) и, как следствие, (13), (14) были получены из уравнений электромагнитного поля (движения упругой среды) в предположении, что $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\zeta)e^{i\omega t}$. Если же теперь пространственное изменение величины $\mathbf{F}$ определяется формулой $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)e^{i\mathbf{kr}}$ (плоская волна), то уравнениям поля будут удовлетворять эволюционные решения

$$\mathbf{F}(t,\ \zeta) = e^{i(\Omega t - \mathbf{kr})}\,\mathbf{F}(0,\ 0), \tag{25}$$

где Ω есть тензор второго ранга, находимый из уравнения

$$\Omega^2 + \alpha' = 0. \tag{26}$$

Для электромагнитного поля α' равно $c^2\mu^{-1}\mathbf{k}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{k}^{\times}$, где c — скорость света. Тензор второго ранга Ω, стоящий в показателе экспоненты на том месте, где обычно находится частота ω, естественно назвать тензором частот. Очевидно, он зависит как от характеристик волны ($\mathbf{k}$), так и от свойств среды (ε, μ). Положим для простоты $\mu = 1$ и будем считать $\mathbf{F} = \mathbf{H}$, тогда для Ω находим из (26) выражение

$$\Omega = \Omega(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\Omega_t}\mathbf{k}^{\times}(\overline{\Omega}_t/\mathbf{k}^2 + c^2\varepsilon^{-1})\,\mathbf{k}^{\times}. \tag{27}$$

Для входящих в (27) следов имеем выражения [21]:

$$\Omega_t = c\sqrt{\varepsilon_t^{-1}\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}\varepsilon^{-1}\mathbf{k} + 2\sqrt{\mathbf{k}^2\,\mathbf{k}\,\overline{\varepsilon^{-1}}\,\mathbf{k}}}, \tag{28}$$

$$\overline{\Omega}_t = c^2\sqrt{\mathbf{k}^2\,\mathbf{k}\,\overline{\varepsilon^{-1}}\,\mathbf{k}}.$$

Имеет место равенство

$$\Omega^2 = -(kcN^{-})^2. \tag{29}$$

Представления (18), (25) удобны для построения негармонических волновых полей в анизотропных средах методом Фурье [26].

Множество всех $\mathbf{F}(t) = \exp(i\Omega t)\,\mathbf{F}(0)$ есть однопараметрическая полугруппа (при $\zeta \geqslant 0$), сжимающая при $\|\mathbf{F}\| \leqslant 1$. Операторы ik_0N (14), (15) и $i\Omega$ (27) являются инфинитезимальными или производящими операторами (генераторами) соответствующих полугрупп. Ясно, что всевозможные решения (ветви) тензорных уравнений (14), (26) характеризуют симметрию поляризационных состояний в среде, т. е. виды тех поляризационных состояний волн, которые переносятся неизменными в различных направлениях нормали $\mathbf{n}$. При этом наряду с изонормальными волнами, распространяющимися в заданном направлении $\mathbf{n}$, появляются ветви N и Ω, соответствующие встречным волнам, распространяющимся в противоположном направлении.

2. Экспоненциальные френелевские операторы отражения от стратифицированных анизотропных сред

Один из распространенных способов описания преобразования волн на границах кристаллов основан на применении тензоров волнового сопротивления (тензоров импедансов). Соответствующая процедура вычисления тензоров отражения и пропускания на границе двух сред в общей ковариантной операторной трактовке с привлечением импедансных тензоров рассматривалась в [9, 10, 13—17].

Как показано выше, эволюция электромагнитного и акустического полей в однородных кристаллах характеризуется экспоненциальными операторами. Так же можно записать в экспоненциальной форме френелевские операторы R отражения волн на границе раздела анизотропных сред или на многослойных системах. Интегральные экспоненты для неоднородных кристаллов рассматривались в [13, 15].

Совокупности операторов отражения R и пропускания D многослойных систем реализуют некоторые новые разновидности групп Ли.

В случае нормального падения упругих волн на однородную или стратифицированную среду для решения задачи отражения (рассеяния назад) можно воспользоваться методом пересчета входного импеданса [27]. В работах [28, 29] этот метод был обобщен на случай стратифицированных оптически и акустически анизотропных сред.

Рассмотрим вначале однородный анизотропный акустический слой 2, находящийся между анизотропными полупространствами 3 и 1. Из полупространства 3 на слой по нормали падает упругая волна

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{u}_0\exp\left[i(Kz-\omega t)\right], \tag{30}$$

где $K=\omega\rho\gamma^{-1}=k_1\tau_1+k_2\tau_2+k_3\tau_3$ — тензор волновых чисел [31], τ_i ($i=1, 2, 3$) — поляризационные проекторы. Волна (30) представляет собой суперпозицию трех изонормальных волн, волновые числа k_i ($i=1, 2, 3$) которых являются собственными значениями тензора K [31].

В слое 2 установившуюся в результате многократных отражений результирующую упругую волну можно представить в виде суперпозиции двух бегущих суммарных волн вида (30), распространяющихся в противоположных направлениях: $\mathbf{u}_2=\exp(iK_2z)\,\mathbf{u}_2^+ + \exp(-iK_2z)\,\mathbf{u}_2^-$. Здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается. На границе слоя 2 и полупространства 1 ($z=0$) условия непрерывности полных смещения и нормальной силы дают

$$\gamma_1(\mathbf{u}_2^+ + \mathbf{u}_2^-)=\gamma_2(\mathbf{u}_2^+ - \mathbf{u}_2^-), \tag{31}$$

где γ_1, γ_2 — тензорные импедансы волн вида (30) [29] в полупространстве 1 и в слое 2 соответственно. Здесь учтено, что тензоры импеданса падающей и отраженной волн отличаются знаком. На границе слоя ($z=-l_2$, ось z направлена из 3 в 1), разделяющей среды 2 и 3, справедливо равенство

$$\gamma_2\left[e^{-iK_2l_2}\,\mathbf{u}_2^+ - e^{iK_2l_2}\mathbf{u}_2^-\right]=\gamma_0\left[e^{-iK_2l_2}\,\mathbf{u}_2^+ + e^{iK_2l_2}\,\mathbf{u}_2^-\right].$$

Отсюда с учетом (31) получаем следующее выражение для входного импеданса γ_0 анизотропного слоя:

$$\gamma_0=\gamma_2\left[e^{-iK_2l_2}-e^{iK_2l_2}(\gamma_2+\gamma_1)^{-1}(\gamma_2-\gamma)\right]\times$$
$$\times\left[e^{-iK_2l_2}+e^{iK_2l_2}(\gamma_2+\gamma_1)^{-1}(\gamma_2-\gamma_1)\right]^{-1}. \tag{32}$$

Сшивая акустические поля на границе $z=-l_2$ между слоем 2 и полупространством 3, для тензора отражения R ($\mathbf{u}_3=R\mathbf{u}$) получаем

$$R=(\gamma_3+\gamma_0)^{-1}(\gamma_3-\gamma_0), \tag{33}$$

где γ_3 — импеданс волны (25) в среде 3, а γ_0 дается формулой (32). Если имеем многослойную структуру, состоящую из N слоев, то ее входной импеданс γ_0^N можно получить последовательным пересчетом импедансов по формуле (32) [28]. Тензор отражения многослойной среды аналогично (33) имеет вид:

$$R_N = (\gamma_{N+1} - \gamma_0^N)^{-1} (\gamma_{N+1} - \gamma_0^N), \tag{34}$$

где γ_{N+1} — импеданс волны (30) в $N+1$ среде, ограничивающей структуру сверху. Выражение для входного импеданса [28, 29] существенно упрощается, если тензоры импеданса γ_i, $i=0, 1, \ldots, N+1$ всех слоев коммутируют между собой. В этом случае

$$\gamma_0^N = [\gamma_0^{N-1} - i\gamma_N \operatorname{tg}(K_N l_N)] [\gamma_N - i\gamma_0^{N-1} \operatorname{tg}(K_N l_N)]^{-1} \gamma_N.$$

Следует иметь в виду, что тензоры R (33) и R_N (34) представляют некоторое дробно-линейное преобразование, точнее, преобразование Кэли [29, 30] тензора относительного импеданса. Для плоской границы раздела двух анизотропных сред имеем

$$\Gamma = \gamma_2^{-1} \gamma_1, \tag{35}$$

где Γ — тензор относительного импеданса при падении волны из среды с тензором внутреннего импеданса γ_2 на границу со средой 1, в которой тензор импеданса волны равен γ_1.

Тензор отражения рассматриваемой структуры с учетом (35) представляется теперь в виде $R = (\gamma_2+\gamma_1)^{-1}(\gamma_2-\gamma_1) = (1+\Gamma)^{-1}(1-\Gamma) = \exp(iT)$. Легко проверить, что равенство $(1+\Gamma)^{-1}(1-\Gamma) = \exp(iT)$ удовлетворяется тождественно при тензоре $T = \operatorname{arctg}(i\Gamma)$. Здесь $\operatorname{arctg}(i\Gamma)$ представляет операторозначную функцию [32]. В итоге получаем:

$$\gamma_0 = \alpha_N e^{-iK_N l_N} e^{i\Phi_N} e^{iK_N l_N}, \tag{36}$$

$$e^{i\Phi_N} = [1 - e^{2iK_N l_N} e^{iT_{N-1}}] [1 + e^{2iK_N l_N} e^{iT_{N-1}}]^{-1}. \tag{37}$$

Стратифицированная структура в результате отражения звука при нормальном падении осуществляет преобразование Кэли тензоров относительного импеданса. Это, в частности, позволяет использовать только экспоненциальные операторы, а также избежать неограниченного возрастания компонент тензора импедансов в определенных точках отрезка интегрирования (см. также [33]). В случае кусочно-однородной стратифицированной среды преобразования полей на границах и в объеме, как видно из изложенного, характеризуются экспоненциальными операторами одного и того же класса, являющимися элементами групп Ли. Экспоненциальные операторы описывают также преобразование поляризации волн, распространяющихся вдоль оси винтообразных закрученных анизотропных структур [9] (холестерические жидкие кристаллы). Как показано в [9], справедливо соотношение:

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}(z)] = \exp(akz\mathbf{n}^{\times}) \exp(ikzN)[\mathbf{n}\mathbf{E}(0)],$$

где a — параметр закрутки.

Применение экспоненциальных операторов Коши для расчета пропускания оптических каналов с произвольно ориентированными анизотропными элементами рассматривалось в [9, 34] с помощью тензоров нормальной рефракции N_n, а также являющихся генераторами групп Ли. При переходе от косого падения к нормальному на границу анизотропных сред тензоры N_n и N совпадают [34, 35].

Экспоненциальные операторы пространственно-временной эволюции использованы в [9, 10, 36] для описания пространственной и частотной дисперсии электромагнитных и упругих волн в анизотропных средах. С их помощью было выяснено, каким образом материальные тензоры в диспергирующих средах могут вводиться на разнообразных группах эволюционных операторов. При этом были отмечены недостатки обычно применяемого подхода, связанного с необоснованным распространением формализма групп эволюционных операторов в изотропных диспергирующих средах на случай анизотропных сред.

В работах [25, 37] изложен ковариантный метод вычисления генераторов N групп Ли в подвергнутых внешним воздействиям кристаллах.

В работах [38] рассматривался изоморфизм групп $SL(2, c)$ и $SO(3, c)$ в задаче отражения света от стратифицированных анизотропных сред. Использование полярного разложения френелевских операторов отражения позволило применить для их представления векторную параметризацию, развитую в [3, 7]. При этом оказалось возможным достигнуть значительного упрощения расчетов отражения и пропускания для сложных многокомпонентных анизотропных систем ввиду простого закона композиции вектор-параметров группы вращений.

В работах [39] операторы Коши были использованы в приближенных операторных решениях уравнений Гельмгольца в геометрической оптике и акустике анизотропных сред. Важнейшими характеристиками таких решений являются введенные там операторы эйконала.

В [40] исследованы случаи вырождения генераторов групп Ли для уравнений кристаллооптики и найдены условия возбуждения волн с квадратичной и кубичной координатными зависимостями амплитуд.

Таким образом, в оптике и акустике кристаллов имеются обширные области применения теоретико-группового анализа на основе полученных в цитированных работах компактных ковариантных выражений для генераторов соответствующих групп.

Список литературы

1. Пуанкаре А. // Принцип относительности. М., 1973. С. 90, 118.
2. Poincare H. Theorie mathematique de la lumiere. Paris, 1892.
3. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. М., 1979.
4. Круглов С. И., Плетюхов В. А., Стражев В. И. // О поляризационной симметрии уравнений Максвелла. Мн., 1980. Препринт ИФ АН БССР. № 226. С. 47.
5. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, 1983.
6. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Мн., 1958.
7. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1976.
8. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., 1965.
9. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. Волновые операторы в оптике. Мн., 1983. Препринт ИФ АН БССР. № 304; Эволюционные операторы в электродинамике диспергирующих сред. Мн., 1987. Препринт ИФ АН БССР. № 463.
10. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Fedorov F. I. // Journ. Mod. Optics. 1990. V.. 37. № 1. P. 85.
11. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М., 1971.
12. Киржниц Д. А. // УФН. 1987. Т. 152. Вып. 3. С. 399.
13. Барковский Л. М. // ЖПС. 1975. Т. 23. С. 304; Докл. АН БССР. 1976. Т. 20. № 6. С. 491.
14. Федоров Ф. И., Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 8. С. 684.
15. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 36. Вып. 6. С. 1140; Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1313; Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 12. С. 1070.
16. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1976. Т. 21. № 3. С. 445; Оптика и спектроскопия. 1979. Т. 46. № 5. С. 938.
17. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 5. С. 424; Акустический журнал. 1987. Т. 33. Вып. 5. С. 798.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1945.
19. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 4.
20. Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1975. № 5. С. 12.
21. Барковский Л. М. // ЖПС. 1975. Т. 23. С. 304; Докл. АН БССР. 1976. Т. 20. № 6. С. 491.
22. Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // Оптика и спектроскопия. 1975. Т. 39. С. 150.
23. Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. С. 1171.
24. Математическая энциклопедия. М., 1982. Т. 3. С. 59.
25. Барковский Л. М. // Оптика и спектроскопия. 1973. Т. 34. Вып. 6. С. 1193; 1975. Т. 38. Вып. 1. С. 115; Кристаллография. 1973. Т. 18. С. 465; 1977. Т. 22. Вып. 1. С. 21.
26. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. // ЖПС. 1983. Т. 39. Вып. 6. С. 996.

27. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973. С. 511.
28. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1978. Т. 23. № 6. С. 1145.
29. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Акустический журнал. 1987. Т. 33. № 5. С. 798.
30. Барковский Л. М., Нгуен Тхай Хонг // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. № 1. С. 114.
31. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1975. № 2. С. 34; 1979. № 2. С. 43.
32. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. С. 670.
33. Прихотько В. Ю., Тютекин В. В. // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 2. С. 212.
34. Федоров Ф. И. и др. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1982. № 3. С. 59; 1982. № 4. С. 49.
35. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A. V. // Journ. Phys. A; Math. Gen., 1987. V. 20. P. 1095.
36. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 6. С. 508.
37. Барковский Л. М. и др. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 2. С. 222.
38. Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 8. С. 692; Оптика и спектроскопия. 1989. Т. 67. Вып. 3. С. 629.
39. Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 70. Вып. 1. С. 61; Акустический журнал. 1991. № 2. С. 230.
40. Borzdov G. N. // Journ. Mod. Optics. 1990. V. 37. № 3. P. 281; Optics Comm. 1990. V. 75. № 3. P. 205; Кристаллография. 1990. Т. 35. Вып. 3. С. 535.

Поступила в редакцию 14.09.91.

УДК 530.145

И. В. НИЧИПОР, И. Д. ФЕРАНЧУК, А. П. УЛЬЯНЕНКОВ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

В работе [1] проведено обобщение нулевого приближения операторного метода (ОМ) для аппроксимации собственных значений и волновых функций частицы, движущейся в пространственно-периодическом поле и приближенного расчета квазиэнергетических состояний в поле, периодическом по времени. Специфика рассматриваемых случаев связана с тем, что волновые функции должны удовлетворять дополнительным условиям, вытекающим из теоремы Флоке [2]. Построенные в [1] базисные последовательности волновых функций нулевого приближения $|\Psi_n^{(0)}(\omega)\rangle$ обеспечивают достаточно высокую точность ($\leqslant 1\ \%$) аппроксимации решений при любых параметрах, однако не позволяют построить в явном виде алгоритм вычисления матричных элементов соответствующего гамильтониана для произвольных квантовых чисел, что затрудняет использование итерационной схемы. В связи с этим предложим еще одну модификацию ОМ, которая позволяет упростить вычисления в подобных случаях.

Рассмотрим более детально возникающие трудности на примере уравнения Матье, соответствующего уравнению Шредингера для частицы с массой $m=1/2$ в одномерном периодическом поле

$$(\hat{H}-E)\Psi=(\hat{p}^2+h\cos(2x)-E)\Psi(x)=(-d^2/dx^2+h\cos(2x)-\\-E)\Psi(x)=0. \quad (1)$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее теореме Блоха (частный случай теоремы Флоке)

$$\Psi(x+\pi)=e^{ikx}\Psi(x) \quad (2)$$

с произвольным квазиимпульсом $-1\leqslant k\leqslant 1$, определяющим зонный спектр $E_n(k)$ частицы в периодическом поле [3]. Для построения волновых функций нулевого приближения ОМ проведем, в соответствии с [1], приближенную факторизацию гамильтониана (1) с помощью пары канонически сопряженных операторов: