выражение (2) примет вид:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{npj} R_{npj} (\psi_n(z) - \varphi_p(z) b_{np} d_p \chi / (1 + \chi)),$$

где

$$A_{npj} = \left(\int_0^H q_j(z) \varphi_p(z) dz \right) / b_{np},$$

$R_{npj} = D_1 R_{np} + D_2 R_{np} \int dr / (ER_{np}^2) + R_{np} \int (\int ER_{np} f_j(r) dr) dr / (ER_{np}^2)$,
 $E = r / (1 + \chi)^2$, D_1, D_2 — некоторые константы [2]. В частности, при $F(r, z) = \delta(z - z_0) \delta(r)$ получим

$$\Phi(r, z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(z_0) [\varphi_p(z) d_p \chi - \psi_n(z) (1 + \chi) / b_{np}] y_{np}(r) / r^2.$$

При некоторых значениях функций $m_1(z)$ и $m_2(z)$ возможно получить решение задач (4), (5) в конечном виде. Более подробно этот вопрос был исследован в [3] для целого класса зависимостей скорости звука от глубины.

Список литературы

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л., 1982.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
3. Де Санто Дж. А. // Акустика океана / Под ред. Де Санто Дж. А. М., 1982. С. 37.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 517.977

С. ТАГАЙНАЗАРОВ

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СУБОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $K = \{1, \dots, k\}$, $L = \{1, \dots, l\}$, $A_0 = A_0(L, J)$, $B_0 = B_0(L, K)$, $H = H(I, L)$; $\rho \in R_+$; $b_*, b^* \in R^m$; $x, d_*, d^* \in R^n$; $y, f_*, f^* \in R^k$; $f_* \leq 0 \leq f^*$; $X = \{x \in R^n: d_* \leq x \leq d^*\}$, $Y_\rho = \{y \in R^k: \rho f_* \leq y \leq \rho f^*\}$, $A = HA_0$, $B = HB_0$, $h_{(i)}$ — i -я строка матрицы H , $Q = \{z \in R^l: Z = A_0 x, x \in X\}$, $Z = \{z: b_* \leq Hz \leq b^*\}$, $S_\rho = \{z \in R^l: Z = B_0 y, y \in Y_\rho\}$, $Z_\rho = \{z: z = z^1 + z^2, z^1 \in Z, z^2 \in S_\rho\}$, $Z_\rho < \infty$, $Q \cap Z_\rho \neq \emptyset$

Задача. Найти оптимальный план $z^0 \in Q^*$:

$$z^0 \in Q \cap Z_\rho, Q \cap Z_\rho = \emptyset \text{ при } \rho < \rho^0. \quad (1)$$

Пусть $I_{\text{оп}} \subset I$, $J_{\text{оп}} \subset J$, $K_{\text{оп}} \subset K$; $K_*, K^* \subset K_{\text{оп}}$, $|I_{\text{оп}}| + |K_*| + |K^*| = |J_{\text{оп}}| + |K_{\text{оп}}| + 1$. Рассмотрим два случая: 1. $K_* \cap K^* = \emptyset$; 2. $K_* \cap K^* = k_0$, $f_*(k_0) \neq f^*(k_0)$.

Сформируем множество

$$K_{(\text{оп})} = \begin{cases} [K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*)] \cup k_\rho, & \text{если } K_* \cap K^* = \emptyset, \\ K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*), & \text{если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0), \end{cases}$$

где k_ρ — дополнительный индекс, соответствующий переменной ρ : $y k_\rho = \rho$.

Построим матрицу $D_{\text{оп}} = D(I_{\text{оп}}; J_{\text{оп}}, K_{(\text{оп})})$ с блоками $D(I_{\text{оп}}; J_{\text{оп}}, K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*)) = (A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) - B(I_{\text{оп}}, K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*)))$; $D(I_{\text{оп}}, k_\rho) = (B(I_{\text{оп}}, K_*) f_*(K_*) + B(I_{\text{оп}}, K^*) f^*(K^*))$.

* Г. Габасов, Э. А. Салнев, С. Тагайназаров. Оптимизация статических и дискретных систем в условиях неопределенности / Редкол. журн. «Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1988. 41 с. Деп. в ВИНТИ 29.06.88. № 5196-B88.

Совокупность $M_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, K_*, K^*; J_{\text{оп}}, K_{\text{оп}}\}$ назовем опорой задачи (1), если $\det \bar{D}_{\text{оп}} \neq 0$.

Обозначим: $I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}$, $K_{*\text{н}} = K \setminus K_*$, $K_{\text{н}} = K \setminus K^*$, $J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$, $K_{\text{н}} = K \setminus K_{\text{оп}}$.

Пару $\{x, M_{\text{оп}}\}$ из плана x и опоры $M_{\text{оп}}$ будем называть опорным планом. Опорный план считаем невырожденным, если он вместе с некоторым $\rho = \rho(x)$ и $y = y(x)$ удовлетворяет соотношениям:

$$d_*(J_{\text{оп}}) < x(J_{\text{оп}}) < d^*(J_{\text{оп}}), \quad b_*'(I_{\text{н}}) < D(I_{\text{н}}, J)x + D(I_{\text{н}}, K)y < b^*(I_{\text{н}}), \\ \rho f_*(K_{*\text{н}}) < y(K_{*\text{н}}), \quad y(K_{\text{н}}) < \rho f^*(K_{\text{н}}).$$

Пусть $\{x, M_{\text{оп}}\}$ — опорный план. Матрицу $D_{\text{оп}}^{-1}$ разобьем на блоки

$$D_{\text{оп}}^{-1} = \begin{pmatrix} F_x = F(J_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}) \\ F_y = F(K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*), I_{\text{оп}}) \\ u_{\text{оп}} = u'(I_{\text{оп}}) \end{pmatrix}, \text{ если } K_* \cap K^* = \emptyset,$$

$$D_{\text{оп}}^{-1} = \begin{pmatrix} F_x = F(J_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}) \\ F_y = F(K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*), I_{\text{оп}}) \end{pmatrix}, \text{ если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0).$$

Подсчитаем векторы $\Delta^{x'} = u'_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J)$, $\Delta' = u'_{\text{оп}} B(I_{\text{оп}}, K)$, $\Delta_* = \Delta(K_*)$, $\Delta^* = \Delta(K^*)$, если $K_* \cap K^* = \emptyset$; $\Delta_{*k_0} = -1/(f_{*k_0}^* - f_{*k_0})$, $\Delta_{k_0}^* = 1/(f_{*k_0}^* - f_{*k_0})$, если $K_* \cap K^* = k_0$, $f_*(k_0) \neq f^*(k_0)$.

Можно показать, что $\Delta_* f_* + \Delta^* f^* = 1$.

Наряду с опорным планом $\{x, M_{\text{оп}}\}$ рассмотрим тройку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\rho})$ такую, что 1) компоненты $\bar{x}(J_{\text{н}})$, $\bar{y}(K_{\text{н}})$, $\bar{\omega}_{\text{оп}} = \omega(I_{\text{оп}})$, $\bar{S}_{*\text{оп}} = \bar{S}_*(K_*)$, $\bar{S}_{\text{оп}} = \bar{S}^*(K^*)$, $\omega_{\text{оп}} = \omega(I_{\text{оп}}) = D(I_{\text{оп}}, J)x + D(I_{\text{оп}}, K)y$, $S_* = S_*(K) = y(K) - \rho f_*(K)$, $S^* = S^*(K) = y(K) - \rho f^*(K)$ — произвольны; 2) компоненты $\bar{x}(J_{\text{оп}})$, $\bar{y}(K_{\text{оп}})$ и число $\bar{\rho}$ удовлетворяют системе уравнений: $\bar{\omega}_{\text{оп}} = D(I_{\text{оп}}, J)\bar{x} + D(I_{\text{оп}}, K)\bar{y}$, $\bar{S}_{*\text{оп}} = \bar{y}(K_*) - \bar{\rho} f_*(K_*)$, $\bar{S}_{\text{оп}} = \bar{y}(K^*) - \bar{\rho} f^*(K^*)$.

Обозначим: $\Delta \omega_{\text{оп}} = \bar{\omega}_{\text{оп}} - \omega_{\text{оп}}$, $\Delta S_{*\text{оп}} = \bar{S}_{*\text{оп}} - S_{*\text{оп}}$, $\Delta S_{\text{оп}} = \bar{S}_{\text{оп}} - S_{\text{оп}}$, $\Delta y(K) = \bar{y}(K) - y(K)$, $\Delta x(J) = \bar{x}(J) - x(J)$.

Разобьем множества $I_{\text{оп}}$, $J_{\text{н}}$ на непересекающиеся подмножества; $I_{\text{оп}}^+ = \{i \in I_{\text{оп}}: u_i \geq 0\}$, $I_{\text{оп}}^- = \{i \in I_{\text{оп}}: u_i \leq 0\}$, $I_{\text{оп}}^+ \cap I_{\text{оп}}^- = \emptyset$, $I_{\text{оп}}^+ \cup I_{\text{оп}}^- = I_{\text{оп}}$; $J_{\text{н}}^+ = \{j \in J_{\text{н}}: \Delta_j^x \geq 0\}$, $J_{\text{н}}^- = \{j \in J_{\text{н}}: \Delta_j^x \leq 0\}$, $J_{\text{н}}^+ \cap J_{\text{н}}^- = \emptyset$, $J_{\text{н}}^+ \cup J_{\text{н}}^- = J_{\text{н}}$.

Построим компоненты $\xi(I_{\text{оп}})$, $\kappa(J_{\text{н}})$: $\xi_i = b_{*i}$, если $i \in I_{\text{оп}}^+$; $\xi_i = b_i^*$, если $i \in I_{\text{оп}}^-$; $\kappa_j = d_j^*$, если $j \in J_{\text{н}}^+$; $\kappa_j = d_{*j}$, если $j \in J_{\text{н}}^-$. Положим $\kappa_{\text{оп}} = D_{\text{оп}}^{-1}(\xi_{\text{оп}} + \rho(B(I_{\text{оп}}, K_*)f_{*\text{оп}} + B(I_{\text{оп}}, K^*)f_{\text{оп}}) - A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}})\kappa_{\text{н}})$.

$$\text{Число } \beta = \beta(x, M_{\text{оп}}) = \begin{cases} \Delta_{\text{н}}^{x'}(x_{\text{н}} - \kappa_{\text{н}}) + u'_{\text{оп}}(\xi_{\text{оп}} - \omega_{\text{оп}}) + \rho(\Delta_* f_{*\text{оп}} + \\ + \Delta_{\text{оп}}^* f_{\text{оп}}^*), \text{ если } K_* \cap K^* = \emptyset, \\ \rho(\Delta_{*k_0} f_{*k_0}^* + \Delta_{k_0}^* f_{k_0}^*), \text{ если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0), \end{cases}$$

назовем оценкой субоптимального плана x .

Справедлива формула

$$\Delta \rho = \bar{\rho} - \rho = \begin{cases} - \sum_{j \in J_{\text{н}}} \Delta_j^x \Delta x_j + \sum_{k \in K_{\text{н}}} \Delta_k \Delta y_k + \sum_{i \in I_{\text{оп}}} u_i \Delta \omega_i + \\ + \sum_{k \in K_*} \Delta_{*k} \Delta S_{*k} + \sum_{k \in K^*} \Delta_k^* \Delta S_{\text{н}}^*, \text{ если } K_* \cap K^* = \emptyset, \\ \Delta_{k_0}^* \Delta S_{k_0}^* + \Delta_{*k_0} \Delta S_{*k_0}, \text{ если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0). \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) следуют:

Критерий оптимальности. Для оптимальности плана x достаточно существования такой опоры $M_{\text{оп}}$, что выполняются соотношения: 1) если $M_{\text{оп}}$ — опора первого типа, то

$$\begin{aligned}
u_i &\geq 0 \text{ при } h'_{(i)}(A_0x - B_0y) = b_{*i}; \quad u_i \leq 0 \text{ при } h'_{(i)}(A_0x - B_0y) = b_i^*, \\
u_i &= 0 \text{ при } b_{*i} \leq h'_{(i)}(A_0x - B_0y) \leq b_i^*, \quad i \in I_{\text{оп}}; \quad \Delta_j^x \geq 0 \text{ при } x_j = d_j^*; \\
\Delta_j^x &\leq 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \quad \Delta_j^x = 0 \text{ при } d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, \quad j \in J_{\text{н}}; \quad \Delta_{*k} \geq 0 \text{ при} \\
y_k &= \rho f_{*k}; \quad \Delta_{*k} = 0 \text{ при } y_k > \rho f_{*k}, \quad k \in K_*, \quad \Delta_k^* \leq 0 \text{ при } y_k = \rho f_k^*; \\
\Delta_k^* &= 0 \text{ при } y_k < \rho f_k^*; \quad k \in K^*, \quad \Delta_k = 0 \text{ при } k \in K_{\text{н}}, \quad (3)
\end{aligned}$$

2) если $M_{\text{оп}}$ — опора второго типа, то

$$\begin{aligned}
\Delta_{*k_0} &\geq 0 \text{ при } y_{k_0} = \rho f_{*k_0}; \quad \Delta_{*k_0} = 0 \text{ при } y_{k_0} > \rho f_{*k_0}, \quad k_0 \in K_*; \\
\Delta_{k_0}^* &\leq 0 \text{ при } y_{k_0} = \rho f_{k_0}^*; \quad \Delta_{k_0}^* = 0 \text{ при } y_{k_0} < \rho f_{k_0}^*, \quad k_0 \in K^*.
\end{aligned}$$

Пусть $\{x, M_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный план. Для оптимальности плана x выполнение соотношений (3) необходимо.

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon \geq 0$ для ε -оптимальности плана x необходимо и достаточно существования такой опоры $M_{\text{оп}}$, при которой оценка субоптимальности удовлетворяет неравенству $\beta(x, M_{\text{оп}}) \leq \varepsilon$.

Поступила в редакцию 27.10.89.

УДК 517.538.5

Е. А. РОВБА

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ТИПА ФЕЙЕРА — БЕРНШТЕЙНА

Пусть $\{\alpha_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $\alpha_0 = 0$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_k| < 1$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(u) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad \theta_k = \arg \alpha_k; \\
\lambda_n(x; y) &= \int_x^y \lambda_n(u) du.
\end{aligned}$$

Так как $\forall a \in [0; 1) \int_0^{2\pi} \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos u + a^2} du = 2\pi$, то функция $\lambda_n(0; y)$ переменной y возрастает на отрезке $[0; 2\pi]$ от 0 до $(2n + 1)\pi$. Следовательно, функция $\sin \lambda_n(0; y)$ имеет на промежутке $[0; 2\pi]$ $(2n + 1)$ нулей. Обозначим их через x_k , $k = 0, 2n$: x_k

$$\int_0^{x_k} \lambda_n(u) du = k\pi, \quad k = 0, 2n.$$

Для произвольной функции $f \in C_{2\pi}$ полагаем:

$$G_n(x; f) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f(x_k)}{2\lambda_n(x_k)} D_n(x; x_k), \quad (1)$$

где $D_n(x; x_k) = \sin \lambda_n(x_k; x) / \sin \frac{x - x_k}{2}$.

Нетрудно проверить, что $G_n(x; f)$ есть тригонометрическая интерполяционная рациональная функция порядка не выше n . Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow x_k} D_n(x; x_k) = 2\lambda_n(x_k), \quad G_n(x_k; f) = f(x_k), \quad k = 0, 2n.$$