Краткие сообщения

УДК 534.23:517.95

А. К. БЕЛЯВСКИЙ, И. К. ДАНЕЙКО

К ВОПРОСУ О ВОЛНОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕСТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

Как известно, при наличии горизонтальной зависимости скорости звука получение волнового решения уравнения Гельмгольца

$$\Phi''_{rr} + \frac{1}{r}\Phi'_r + \Phi''_{zz} + k^2(r, z)\Phi = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$\Phi(r, 0) = 0, \ \Phi'_z(r, H) + g\Phi(r, H) = 0,$$

где g — адмитанс полупространства $z > H$, H — глубина волновода, вызывает определенные трудности [1]. Решить эту задачу возможно, лишь задавшись определенным видом волнового числа k.

Пусть $k^2(r, z) = m_1(z) + \chi(r) m_2(z)$; χ, m_n — произвольные функции переменных r и z соответственно. Причем функция $m_1(z)$ определяет некоторый «базовый» профиль скорости звука в данной среде, а $m_2(z)$ — возмущение, вносимое в него в горизонтальном направлении по закону $\chi(r)$.

Такой подход наиболее эффективен в случае, когда известны лишь два экспериментальных профиля по трассе распространения и может быть задан закон, по которому первый из них переходит во второй. Тогда решение уравнения (1) следует искать в виде:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} A_{np}\,[\psi_n(z) - \varphi_p(z)\, b_{np}\, d_p\, \chi/(1+\chi)]\, R_{np}(r). \qquad (2)$$

Здесь $b_{np} = \int\limits_0^H \psi_n(z)\varphi_p(z)\,dz$, $d_p = \left(\int\limits_0^H \varphi_p^2(z)\,dz\right)^{-1}$ — нормирующий множитель, A_{np} — коэффициент возбуждения, $R_{np}(r)$ удовлетворяет уравнению

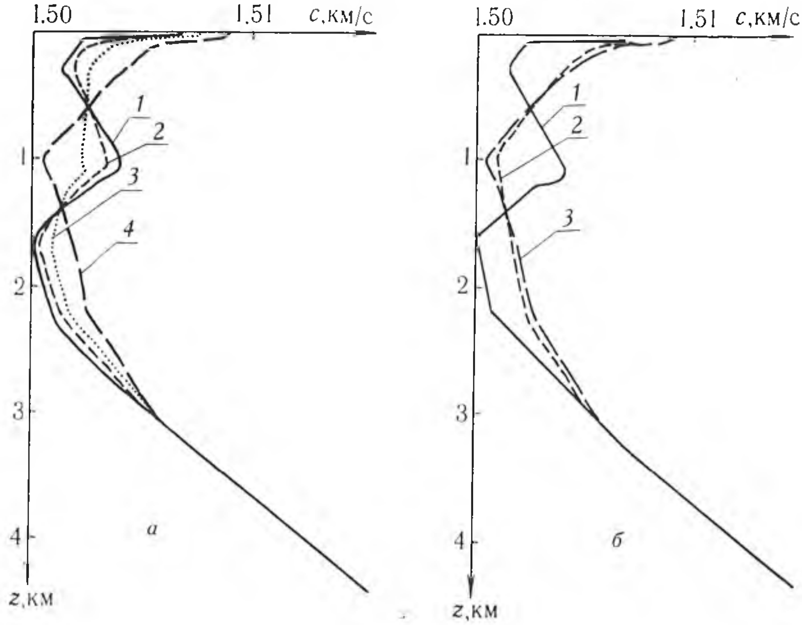
$$r(1+\chi)^2 R'' + (1+\chi)(1+\chi - 2r\chi')R' + [r(1+\chi)^3\alpha_n^2 - r\chi(1+\chi)^2\xi_p^2 - \\ - r(\chi''(1+\chi) - 2\chi'^2) - \chi'(1+\chi)]R = 0 \qquad (3)$$

(штрих означает дифференцирование по r), а $\psi_n(z)$ и $\varphi_p(z)$ являются решениями следующих граничных задач Штурма — Лиувиля:

$$\psi'' + (m_1(z) - \alpha_n^2)\psi = 0, \ \psi(0) = 0, \ \psi'(H) + g\psi(H) = 0, \qquad (4)$$

$$\varphi'' + (m_1(z) - m_2(z) - \xi_p^2)\varphi = 0, \ \varphi(0) = 0, \ \varphi'(H) + g\varphi(H) = 0. \qquad (5)$$

Следует иметь в виду, что $\psi_n(z) = \sum\limits_p b_{np} d_p \varphi_p(z)$, в чем нетрудно убедиться, домножив обе части равенства на φ_k и интегрируя по z от 0 до H при условии $\int\limits_0^H \varphi_k\varphi_p\,dz = 0$, $(k \neq p)$. Если $m_2\chi = 0$, то последнее разложение сводится к хорошо известному решению однородного уравнения



Зависимость профилей скорости звука от расстояния для $D=1$, $r=5$ (*1*), 20 (*2*), 35 (*3*) и 50 (*4*) км:
а — $\chi(r) = Dr^2$; *б* — $\chi(r) = D/r^2$

Гельмгольца: $\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(z) H_0^{(1)}(\alpha_n r)$, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка.

Рассмотрим теперь уравнение (3). Подстановка $R(r) = (1+\chi)\, y(r)/r^{\frac{1}{2}}$ приводит его к виду

$$y'' + [(2r)^{-2} + \alpha_n^2 + (\alpha_n^2 - \xi_p^2)\chi]\, y = 0 \qquad (6)$$

и для $\chi(r) = Dr^2$, например,

$$y(r) = r^{-\frac{1}{2}} W_{t,0}([D(\xi_p^2 - \alpha_n^2)]^{\frac{1}{2}} r^2),$$

где $t = \alpha_n^2/[4(D(\xi_p^2 - \alpha_n^2))^{\frac{1}{2}}]$, D — константа, W — функция Уиттекера. На рисунке (*а*) приведен один из возможных (для данного примера) наборов идеализированных профилей скорости звука, взятых при $D = 1$ и $r = 5$, 20, 35 и 50 км, причем экспериментально заданными считаются только первый и последний из них. Аналогичным образом можно получить решение для случая $\chi(r) = D/r^2$. После несложных преобразований будем иметь:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} A_{np}[\psi_n(z)(1 + Dr^2) - \varphi_p(z)\, b_{np} d_p]\, H_\nu^{(1)}(\alpha_n r)/(Dr^2),$$

$$\nu = [D(\xi_p^2 - \alpha_n^2)]^{\frac{1}{2}}/2.$$

Соответствующее изменение профилей с расстоянием приводится на рисунке (*б*).

В случае, когда в данной области присутствует распределенный источник, заданный функцией

$$F(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(r)\, q_j(z),$$

выражение (2) примет вид:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_{npj} R_{npj} (\psi_n(z) - \varphi_p(z) b_{np} d_p \chi/(1+\chi)),$$

где

$$A_{npj} = \left(\int_0^H q_j(z)\varphi_p(z)\,dz\right)/b_{np},$$

$$R_{npj} = D_1 R_{np} + D_2 R_{np}\int dr/(ER_{np}^2) + R_{np}\int\left(\int ER_{np} f_j(r)\,dr\right)dr/(ER_{np}^2),$$

$E = r/(1+\chi)^2$, D_1, D_2 — некоторые константы [2]. В частности, при $F(r, z) = \delta(z - z_0)\delta(r)$ получим

$$\Phi(r, z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(z_0)\,[\varphi_p(z) d_p\chi - \psi_n(z)(1+\chi)/b_{np}]\, y_{np}(r)/r^{\frac{1}{2}}.$$

При некоторых значениях функций $m_1(z)$ и $m_2(z)$ возможно получить решение задач (4), (5) в конечном виде. Более подробно этот вопрос был исследован в [3] для целого класса зависимостей скорости звука от глубины.

Список литературы

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л., 1982.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
3. Де Санто Дж. А. // Акустика океана / Под ред. Де Санто Дж. А. М., 1982. С. 37.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 517.977

С. ТАГАЙНАЗАРОВ

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СУБОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $K = \{1, \dots, k\}$, $L = \{1, \dots, l\}$, $A_0 = A_0(L, J)$, $B_0 = B_0(L, K)$, $H = H(I, L)$; $\rho \in R_+$; b_*, $b^* \in R^m$; x, d_*, $d^* \in R^n$; y, f_*, $f^* \in R^k$; $f_* \leqslant 0 < f^*$; $X = \{x \in R^n: \ d_* \leqslant x \leqslant d^*\}$, $Y_\rho = \{y \in R^k : \rho f_* \leqslant y \leqslant \rho f^*\}$, $A = HA_0$, $B = HB_0$, $h_{(i)}$ — i-я строка матрицы H, $Q = \{z \in R^l : Z = A_0 x, \ x \in X\}$, $Z = \{z : b_* \leqslant Hz \leqslant b^*\}$, $S_\rho = \{z \in R^l: Z = B_0 y, \ y \in Y_\rho\}$, $Z_\rho = \{z: \ z = z^1 + z^2, \ z^1 \in Z, \ z^2 \in S_\rho\}$, $\exists_{\bar\rho} < \infty$, $Q \cap Z\bar\rho \neq \varnothing$

Задача. Найти оптимальный план $z^0 \in Q^*$:

$$z^0 \in Q \cap Z_{\rho^0}, \ Q \cap Z_\rho = \varnothing \text{ при } \rho < \rho^0. \tag{1}$$

Пусть $I_{оп} \subset I$, $J_{оп} \subset J$, $K_{оп} \subset K$; K_*, $K^* \subset K_{оп}$, $|I_{оп}| + |K_*| + |K^*| = |J_{оп}| + |K_{оп}| + 1$. Рассмотрим два случая: 1. $K_* \cap K^* = \varnothing$; 2. $K_* \cap K^* = k_0$, $f_*(k_0) \neq f^*(k_0)$.

Сформируем множество

$$K_{(оп)} = \begin{cases} [K_{оп} \diagdown (K_* \cup K^*)] \cup k_\rho, & \text{если } K_* \cap K^* = \varnothing, \\ K_{оп} \diagdown (K_* \cup K^*), & \text{если } K_* \cap K^* = k_0, \ f_*(k_0) \neq f^*(k_0), \end{cases}$$

где k_ρ — дополнительный индекс, соответствующий переменной $\rho : yk_\rho = \rho.$,

Построим матрицу $D_{оп} = D(I_{оп}; J_{оп}, K_{(оп)})$ с блоками $D(I_{оп}; J_{оп} K_{оп} \diagdown (K_* \cup K^*)) = (A(I_{оп}, J_{оп}) \ -B(I_{оп}, K_{оп} \diagdown (K_* \cup K^*))$; $D(I_{оп}, k_\rho) = (B(I_{оп}, K_*) f_*(K_*) + B(I_{оп}, K^*) f^*(K^*))$.

* Г. Габасов, Э. А. Салиев, С. Тагайназаров. Оптимизация статических и дискретных систем в условиях неопределенности / Редкол. журн. «Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1988. 41 с. Деп. в ВИНИТИ 29.06.88. № 5196-В88.