УДК 517.977

ДЖ. ДЖЕБРАН (САР)

МИНИМАКСНО-МОДУЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи. Пусть $f_{iklt}(x) = a'_{iklt}x + b_{iklt}$, $t \in T_{ikl}$, $k \in K_l^i$, $l \in L^i$, $i \in I_0 = \{0\} \cup I$, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ — линейные функции векторного аргумента $x(J)$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Образуем с помощью их как компонент кусочно-линейные модульные функции

$$f_{ikl}(x) = f_{ikl} = a'_{ikl}x + b_{ikl} + \sum_{t \in T'_{ikl}} |f_{iklt}| - \sum_{t \in T''_{ikl}} |f_{iklt}|,$$

$$T'_{ikl},\ T''_{ikl} \subset T_{ikl},\ k \in K_l^i,\ l \in L^i,\ i \in I_0.$$

Используем эти функции для формирования кусочно-линейных минимаксно-модульных функций

$$f_i(x) = a'_i x + b_i + \sum_{l \in L_+^i} \max_{k \in K_l^i} f_{ikl} + \sum_{l \in L_-^i} \min_{k \in K_l^i} f_{ikl},\ L_+^i, L_-^i \subset L^i,\ i \in I_0.$$

Минимаксно-модульной задачей кусочно-линейного программирования назовем задачу

$$f_0(x) \to \min,\ f_i(x) = 0,\ i \in I,\ d_* \leqslant x \leqslant d^*. \tag{1}$$

Пусть x — план задачи (1). Введем множества:

$$T_{ikl}^0(x) = \{t \in T_{ikl} : f_{iklt} = 0\},\ T^0 = \bigcup_{k \in K_l^i} \bigcup_{l \in L^i} \bigcup_{i \in I_0} T_{ikl}^0(x),$$

$$T_{ikl}^+(x) = \{t \in T'_{ikl} : f_{iklt} > 0\} \cup \{t \in T''_{ikl} : f_{iklt} < 0\},$$

$$T^+ = \bigcup T_{ikl}^+,\ T_{ikl}^- = \{t \in T'_{ikl} :\ f_{iklt} < 0\} \cup \{t \in T''_{ikl} : f_{iklt} > 0\},$$

$$T^- = \bigcup T_{ikl}^-,\ T' = \bigcup T'_{ikl},\ T'' = \bigcup T''_{ikl}.$$

Таким образом, множество $T^0(x)$ разобьем на два непересекающихся подмножества T^{0+}, T^{0-} и введем обозначения: $\tilde{T}^+ = T^+ \cup T^{0+}$; $\tilde{T}^- = T^- \cup T^0$, $\tilde{T}^{0+} = (\tilde{T}^+ \cap T') \cup (\tilde{T}^- \cap T'')$, $\tilde{T}^{0-} = (\tilde{T}^+ \cap T'') \cup (\tilde{T}^- \cap T')$. Множество всевозможных разбиений вида $t = (T^{0+}, T^{0-})$ обозначим через T. Каждому элементу t этого множества соответствует многогранная область X, n-мерного пространства, определенная соотношениями: $\tilde{T}^+(x) \subset \tilde{T}^+(\bar{x})$; $\tilde{T}^-(x) \subset \tilde{T}^-(\bar{x})$, $\bar{x} \in X$. В области X функции f_{ikl} имеют линейный вид:

$$f_{ikl} = a'_{ikl}x + b_{ikl} + \sum_{t \in T'_{ikl}} |f_{iklt}| - \sum_{t \in T''_{ikl}} |f_{iklt}| = \tilde{a}'_{ikl}x + \tilde{b}_{ikl}.$$

Здесь $\tilde{a}_{ikl} = a_{ikl} + \sum_{t \in \tilde{T}^{0+}} a_{iklt} - \sum_{t \in \tilde{T}^{0-}} a_{iklt}$, $\tilde{b}_{ikl} = b_{ikl} + \sum_{t \in \tilde{T}^{0+}} b_{iklt} - \sum_{t \in \tilde{T}^{0-}} b_{iklt}$.

Далее построим множества $K_{il}^{=} = \{s \in K_l^i:\ \omega_{isl}(x) = 0\}$, $l \in L^i$,

$K_{il}^{>} = \{s \in K_l^i:\ \omega_{isl}(x) > 0\}$, $l \in L_+^i$, $K_{il}^{<} = \{s\ K \in_l^i:\ \omega_{isl}(x) < 0\}, l \in L_-^i$, $i \in I_0$,

где $\omega_{isl}(x) = f_{il}(x) - f_{isl}(x)$, $l \in L^i$, $i \in I_0$; $f_{il} = \max_{s \in K_l^i} f_{isl}$, $l \in L_+^i$, $f_{il} =$

$= \min_{s \in K_l^i} f_{isl}$, $l \in L_-^i$, $i \in I_0$.

Наряду с планом x рассмотрим псевдоплан $\bar{x}=x+\Delta x$. Предположим, что вектор $\bar{x}$ такой, что: $\tilde{T}^{+}(x)\subset\tilde{T}^{+}(\bar{x})$, $\tilde{T}^{-}(x)\subset\tilde{T}^{-}(\bar{x})$, $K_{il}^{\geqslant}(x)\subset K_{il}^{\geqslant}(\bar{x})$, $l\in L_{+}^{i}$, $K_{il}^{\leqslant}(x)\subset K_{il}^{\leqslant}(\bar{x})$, $l\in L_{-}^{i}$, $i\in I_0$. Множество $K_{il}^{=}$, $l\in L^i$, $i\in I_0$, разобьем на подмножества:

$$K_{il}^{\overline{\overline{=}}}=\{s\in K_{il}^{=}(x)\colon\ \omega_{isl}(\bar{x})=0\},\ l\in L^i;\ K_{il}^{\bar{>}}=\{s\in K_{il}^{=}(x)\colon\ \omega_{isl}(\bar{x})>0\},$$
$$l\in L_{+}^{i};\ K_{il}^{\bar{<}}=\{s\in K_{il}^{=}(x)\colon\ \omega_{isl}(\bar{x})<0\},\ l\in L_{-}^{i},\ i\in I_0.$$

Из каждого множества $K_{il}^{\overline{\overline{=}}}$, $l\in L^i$, $i\in I_0$, выделим один индекс s_{il}. Каждому $l\in L^i$, $i\in I_0$ припишем вектор p^{il}:

$$p_s^{il}=0,\ s\neq s_{il},\ p_{s_{il}}^{il}=1,\ s\in K_l^i.$$

Совокупность p^{il}, $l\in L^i$, $i\in I_0$ обозначим через p_t. Пусть P_t — множество всевозможных наборов p_t. Для произвольного разбиения $N=(t,\ p_t)$ введем задачу

$$\tilde{a}_0'\,\Delta x\to\min,$$

$$\tilde{a}_i'\,\Delta x=0,\ i\in I;\ \tilde{a}_l'\,\Delta x\leqslant\alpha_l,\ l\in I_*;\ \tilde{a}_l'\,\Delta x\geqslant\alpha_l,\ l\in I^*; \tag{2}$$

$$A(\tilde{T}^{0+},\ J)\,\Delta x\geqslant\gamma(\tilde{T}^{0+});\ A(\tilde{T}^{0-},\ J)\,\Delta x\leqslant\gamma(\tilde{T}^{0-});\ d_*-x\leqslant\Delta x\leqslant d^*-x,$$

где

$$A(T,\ J/N)=\begin{bmatrix}a_{iklt}(J/N)\\ t\in T_{ikl},\ k\in K_l^i,\ l\in L^i,\ i\in I_0\end{bmatrix};$$

$$\gamma(\tilde{T}^{0+})=-f(\tilde{T}^{0+}/x),\ \gamma(\tilde{T}^{0-})=-f(\tilde{T}^{0-}/x);$$

$$\alpha_l=\omega_{isk}(x),\ k\in L^i,\ s\in K_i^k,\ i\in I_0,\ l\in I_*\cup I^*;$$

$$\tilde{a}_i=a_i+\sum_{l\in L^i}\tilde{a}_{is_{il}l},\ i\in I_0;$$

$$I_*=\bigcup_{i\in I_0}\ \bigcup_{k\in L_{+}^{i}}K_i^k/s_{ik},\ I^*=\bigcup_{i\in I_0}\ \bigcup_{k\in L_{-}^{i}}K_i^k/s_{ik}.$$

Задача (2) имеет, по крайней мере, один план $\Delta x=0$. Очевидно, что если x^0 — оптимальный план задачи (1), то план $\Delta x^0=0$ оптимален в задаче (2). Совокупность $S_0(N)=\{I_{\text{оп}},\ J_{\text{оп}}\}$, $I_{\text{оп}}=I\cup I_{\text{оп}*}\cup I_{\text{оп}}^*\cup\tilde{T}_{\text{оп}}^{0+}\cup\tilde{T}_{\text{оп}}^{0-}$ назовем опорой, если $\det A_{\text{оп}}(N)\neq 0$, $A_{\text{оп}}(N)=(a_{ij},\ i\in I_{\text{оп}},\ j\in J_{\text{оп}})$.

По опоре построим векторы потенциалов $u(I_{\text{оп}}/N)$, оценок $\Delta(J_H/N)$, $J_H=J/J_{\text{оп}}$:

$$u'(I_{\text{оп}}/N)=\tilde{a}_0'(J_{\text{оп}}/N)\,A_{\text{оп}}^{-1}(N),$$

$$\Delta'(J_{\text{н}}/N)=u'(I_{\text{оп}}/N)\,A(I_{\text{оп}},\ J_{\text{н}}/N)-\tilde{a}_0'(J_{\text{н}}).$$

Согласно теории ЛП [1, 2], для оптимальности плана $\Delta x=0$ в задаче (2) необходимо и достаточно существование такой опоры S_0, что для $u(I_{\text{оп}}/N)$, $\Delta(J_H/N)$ справедливы соотношения:

$$u_l\leqslant 0\ \text{при}\ \alpha_l=0;\ u_l=0\ \text{при}\ \alpha_l>0,\ l\in I_{\text{оп}*};$$

$$u_l\geqslant 0\ \text{при}\ \alpha_l=0;\ u_l=0\ \text{при}\ \alpha_l<0,\ l\in I_{\text{оп}}^*;$$

$$u_t\leqslant 0\ \text{при}\ \gamma_t=0;\ u_t=0\ \text{при}\ \gamma_t>0,\ t\in\tilde{T}_{\text{оп}}^{0-};$$

$$u_t\geqslant 0\ \text{при}\ \gamma_t=0;\ u_t=0\ \text{при}\ \gamma_t<0,\ t\in\tilde{T}_{\text{оп}}^{0+};$$

$$\Delta_j\leqslant 0\ \text{при}\ x_j=d_{*j};\ \Delta_j\geqslant 0\ \text{при}\ x_j=d_j^*;$$

$$\Delta_j=0\ \text{при}\ d_{*j}<x_j<d_j^*,\ j\in J_{\text{н}}.$$

Обозначим M — множество всех разбиений типа $N=(t, p_t)$, $M(S_0)$ — множество всех разбиений, для которых опора S_0 вместе с вектором $\Delta x=0$ удовлетворяет критерию оптимальности в задаче (2).

Совокупность опор S^{ij}, $i=\overline{1, t}$, $j=\overline{1, q_i}$ назовем оптимальным пакетом, если $\bigcup\limits_{i\geq 1}\bigcup\limits_{j\geq 1} M(S^{ij}) = M$, $M(S^{ij}) \cap M(S^{i_1j_1}) = \varnothing$, $(i, j)\neq(i_1, j_1)$, $i = \overline{1, t}$, $i_1=\overline{1, t}$, $j=\overline{1, q_i}$, $j_1=\overline{1, q_{i_1}}$. Справедлив следующий пакетный критерий оптимальности. Для локальной оптимальности плана x в задаче (1) необходимо и достаточно существование оптимального пакета опор.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Мн., 1977. Ч. 1. Общие задачи.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1987. Ч. 4. Выпуклые задачи.

Поступила в редакцию 25.04.90.

УДК 517.977

А. О. АБДУРАХИМОВ

ГАРАНТИРОВАННАЯ МИНИМИЗАЦИЯ СОВОКУПНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $J=\{1, 2, \ldots, n\}$, T, K_t^+, K_t^-, $t\in T$,— заданные конечные множества индексов, $K_t = K_t^+\cup K_t^-$; T_+, T_- — некоторые подмножества множества T: $T_+\cup T_- = T$, $T_+\cap T_- = \varnothing$; D, D_{kt}, $k\in K_t$, $t\in T$,— симметричные $n\times n$-матрицы; $D\geqslant 0$, $D_{kt}\geqslant 0$; d_*, d^*, a, a_{kt}, $k\in K_t$, $t\in T$, —n — векторы; b, b_{kt}, $k\in K_t$, $t\in T$,— скаляры.

Множество $X=\{x\in R^n\colon d_*\leqslant x\leqslant d^*\}$ назовем множеством планов. На плане x вычислим значения квадратичных функций n переменных $x=(x_j, j\in J)$:

$$f_{kt}(x) = x' D_{kt}x/2 + a'_{kt}x + b_{kt}.$$

Считая функции $f_{kt}(x)$, $k\in K_t$, $t\in T$, компонентами целевой функции экстремальной задачи, гарантированным значением целевой функции на плане x назовем число

$$f(x) = x'Dx/2 + a'x + b + f^+(x) + f^-(x),$$

где

$$f^+(x) = \sum_{t\in T_+}\max_{k\in K_t^+} f_{kt}(x);$$

$$f^-(x) = \sum_{t\in T_-}\min_{k\in K_t^-} f_{kt}(x).$$

Простой задачей гарантированного квадратичного программирования назовем задачу

$$f(x)\to\min,\ x\in X. \tag{1}$$

Задача (1) представляет задачу кусочно-квадратичного программирования.

Цель данной статьи — реализация конструктивного подхода * для решения задачи (1). Понятия оптимального плана, локально-оптимального плана вводятся стандартно. Пусть x — план задачи (1). В окрестности плана x проанализируем функцию $f(z)$, $z\in R^n$, с целью идентифи-

---

* Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984, 1986, 1987. Ч. 1—4.