$$\frac{1}{K}\int\limits_{A}\frac{dz}{\sqrt{z(z^3+i)}}=1.$$

Переменные t и h в (10) связаны соотношением $h^2=4t^3-4i$. Для перехода в (10) к переменным z и v необходимо сделать замену $z=\frac{1}{t}$.

6. Исходя из решения (8) скалярной задачи Римана получим, что искомую функцию f в (6) можно взять в виде:

$$f(z,\ v)=[\varphi(\zeta)]^n\exp\left\{-n\int\limits_{\hat{\zeta}}^{q}d\hat{\omega}_{\zeta\tilde{\zeta}}(\tau)\right\}. \tag{11}$$

Осталось найти явные аналитические выражения через z и v для символов, входящих в правую часть (11). В качестве φ в (11) можно взять $\varphi(\zeta)=z-z_0$, где $z=f_0(\zeta)$, $z_0=\frac{1}{t_0}$, а t_0 из (10). Правая часть (11) — целая рациональная функция от z, v. Она имеет нуль кратности n в точке $(z_0,\ -v_0)$ и полюс кратности n над точкой $z=\infty$. В зависимости от четности n возникают два случая. Для четного n искомая функция f будет иметь вид:

$$f(z,\ v)=(A_0+A_1z+\ldots+A_{m+2}z^{m+2})+v(B_0+\ldots+B_mz^m). \tag{12}$$

Если же n нечетно, то дополнительно предполагаем, что $f(0,\ 0)=0$, поэтому

$$f(z,\ v)=(A_1z+\ldots A_{m+2}z^{m+2})+v(B_0+\ldots B_mz^m), \tag{13}$$

где $A_0,\ \ldots,\ A_{m+2},\ B_0,\ \ldots,\ B_m$ — неопределенные коэффициенты. Их общее число ($2m+3$, если n нечетно, и $2m+4$, если n четно) равно n. Для нахождения этих коэффициентов необходимо решить систему n линейных однородных уравнений

$$\frac{d^k}{dz^k}f(z,\ v(z))\Bigg|_{\substack{z=z_0\\ v=-v_0}}=0,\ k=\overline{0,\ n-1}. \tag{14}$$

Существование нетривиального решения системы (14) вытекает из существования нетривиального решения задачи Римана (7).

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 6. С. 64.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
3. Зверович Э. И. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
4. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 6. С. 32.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
6. Зверович Э. И., Сетько Е. А. Римановы поверхности правильных $4n$-угольников / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1990. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 04.04.90. № 1845-В90.

Поступила в редакцию 30.05.90.

УДК 62-501.7

Г. А. ХАЦКЕВИЧ, А. В. ПОНОМАРЕНКО

ОБНАРУЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПО ЗАВИСИМЫМ ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную многофакторную регрессионную модель, с помощью которой, например, могут быть описаны информационные системы, функционирующие на фоне помех:

$$y_t=\sum_{i=1}^{p}\theta_i(t)\,x_i(t)+\xi_t,\ t=1,\ 2,\ \ldots,\ T. \tag{1}$$

В модели (1) неизвестные параметры $\theta_i(t)$, $i=1, \ldots, p$ в некоторые моменты времени $t_j \in \{p+1, \ldots, T\}$, $j=1, \ldots, J$, такие, что

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant J} (t_j - t_{j-1}) > p_1, \; t_0 = 0, \; p_1 = kp, \; k \gg 1,$$

могут скачкообразно изменять свои значения:

$$\theta_i(t) = \theta_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{J} (\theta_i^{(j)} - \theta_i^{(j-1)}) e(t - t_j), \; i = 1, \ldots, p, \qquad (2)$$

где $e(\tau)$ — единичная функция Хевисайда; $\theta_i^{(j)} \neq \theta_i^{(j-1)}$, $j = \overline{1, J}$. Заметим, что если $\exists t_j$ такой, что $\theta_i^{(j)} = 0$, уравнение (2) представляет собой структурную неоднородность модели (1), если же $\forall t_j$, $\theta_p^{(j)} \neq 0$, то имеет место параметрическая неоднородность модели в рамках неизменной структуры.

Проблеме обнаружения моментов «разладки» $\{t_j\}$ посвящено большое количество работ [1]. Особенностью данного объекта исследования (1) является коррелированность ошибок наблюдений ξ_t, $t=1, \ldots, T$, образующих гауссовскую последовательность центрированных случайных величин, для которой:

$$M(\xi_t \xi_s) = \begin{cases} \sigma^2 \rho(t, s), & \text{если } t \neq s \\ \sigma^2, & \text{если } t = s, \; t, s = 1, \ldots, T, \end{cases}$$

где M — символ математического ожидания.

Задача состоит в обнаружении моментов неоднородности t_j, $j=\overline{1, J}$ в условиях линейно независимых переменных $x_i(t)$, $i=1, \ldots, p$ по наблюдениям $y_1, \ldots, y_T$.

2. Метод решения задачи.

В целях последовательной обработки наблюдений оценивание неизвестных параметров модели будем осуществлять адаптивным (рекуррентным) образом, предварительно осуществив декорреляцию ошибок наблюдений ξ_t, $t=\overline{1, T}$ и ортогонализацию независимых переменных $x_i(t)$, $i=\overline{1, p}$.

2.1. Декорреляция наблюдений.

Перепишем модель (1) в матричной форме в предположении ее однородности (когда модели (1) $k \to \infty$):

$$y(T) = X(T) \cdot \theta + \xi(T),$$

где $y(T) = (y_1, \ldots, y_T)'$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)'$, $X(T) = \begin{pmatrix} x_1(1) & \ldots & x_p(1) \\ \vdots & & \\ x_1(T) & \ldots & x_p(T) \end{pmatrix}$,

$\xi(T) = (\xi_1, \ldots, \xi_T)'$.

В силу теоремы Гаусса—Маркова [2] оптимальными оценками параметров θ_i, $i = \overline{1, p}$ являются МНК-оценки;

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \| y(T) - X(T)\theta \|^2_{R^{-1}(T)}, \qquad (3)$$

где $\| z \|^2_A = z' A z$, $R(T) = M(\xi(T) \xi'(T))$.

Для представления $\hat{\theta}$ в рекуррентной форме воспользуемся оператором декорреляции $D(T)$, предложенным в [3] и представляющим частный случай разложения Холецкого матрицы $R^{-1}(T)$; $R^{-1}(T) = D'(T) D(T)$. Тогда

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \| y^D(T) - X^D(T)\theta \|^2_{I_T},$$

где $y^D(T) = D(T) y(T)$, $X^D(T) = D(T) X(T)$, $\xi^D(T) = D(T) \xi(T)$.

2.2. Ортогонализация независимых переменных.

По результату Хотеллинга [2], ортогональная матрица плана эксперимента $Q(T)$ позволяет минимизировать полную дисперсию МНК-оценок параметров, т. е.:

$$Q(T) = \underset{X(T)}{\operatorname{argmin}} \operatorname{tr} V(\hat{\theta}(X(T))),$$

где $V(\hat{\theta}) = M(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)')$, $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A. Поэтому, используя процедуру ортогонализации Грамма — Шмидта, преобразуем модель декоррелированных наблюдений к виду:

$$y^D(T) = X^D(T)\theta + \xi^D(T) = Q(T)\theta_u + \xi^D(T); \ \theta_u = U\theta, \tag{4}$$

где U — верхняя треугольная матрица, а $Q'(T)Q(T) = I_p$.

2.3. Рекуррентная форма МНК.

С целью выбора универсального задания начальной оценки параметров итеративного алгоритма воспользуемся процедурой Алберта [4], позволяющей генерировать оптимальные оценки $\hat{\theta}_u(t, \varepsilon)$ параметров θ_u модели [4], начиная с обработки первого наблюдения. Из [4] МНК-оценка $\hat{\theta}_u(t)$ имеет вид:

$$\hat{\theta}_u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \hat{\theta}_u(t, \varepsilon), \ \forall t = 1, \ldots, T,$$

где

$$\hat{\theta}_u(t, \varepsilon) = \hat{\theta}_u(t-1, \varepsilon) + \gamma(t) \cdot (y_t^D - q'(t)\hat{\theta}_u(t-1, \varepsilon)), \ \hat{\theta}_u(0, \varepsilon) = 0. \tag{5}$$

В процедуре (5) коэффициент влияния $\gamma(t)$ вычисляется по разным формулам [4] в зависимости от сравнения текущего объема наблюдений t и числа неизвестных параметров p.

2.4. Обнаружение моментов неоднородности модели.

Последовательно опишем процедуру обнаружения t_j. Пусть $j-1$-й момент неоднородности обнаружен и получена его оценка $\hat{t}_{j-1}$, $j = \overline{2, J}$. Тогда решение задачи обнаружения момента неоднородности t_j модели (1) основано на критерии проверки статистических гипотез:

$$\begin{aligned} &H_{0t}^{(j)} : \theta(\tau) = \theta^{(j-1)} \ (\text{нет «разладки» в } \tau \in [\hat{t}_{j-1}, t]), \\ &H_{1t}^{(j)} : \theta(\tau) = \theta^{(j)} \ (\text{есть «разладка» в } \tau \in [\hat{t}_{j-1}, t]), \ t \geqslant \hat{t}_{j-1} + p_1 + 1 \end{aligned} \tag{6}$$

с заданным уровнем значимости α. Решающей функцией проверки гипотезы (6) служит статистика F-критерия [2], которая в силу гауссовости и независимости наблюдений y_t^D, $t = \overline{1, T}$ представляет собой статистику критерия отношения правдоподобия (при фиксированном $\hat{t}_{j-1}$):

$$F(t) = \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)} \cdot (t - \hat{t}_{j-1} - p_1 - 1), \tag{7}$$

где $S(t)$ — сумма квадратов отклонений $y_\tau^D - \hat{y}_\tau^D$, $\tau = \overline{1, t}$:

$$S(t) = \| y^D(t) - Q(t)\hat{\theta}_u(t) \|^2.$$

Статистика $F(t)$ следует центральному распределению Фишера—Снедекора с $n_1 = 1$ и $n_2 = t - \hat{t}_{j-1} - p_1 - 1$ степенями свободы (в случае справедливости гипотезы $H_{0t}^{(j)}$) и имеет нецентральное распределение Фишера—Снедекора с аналогичными степенями свободы и параметром нецентральности $\delta(t)$ в противном случае. Тогда решающее правило обнаружения момента неоднородности модели t_j имеет вид:

Если $F(t) < F^{-1}_{1,\, t-\hat{t}_{j-1}-p_1-1}(1-\alpha)$, то $H_{0t}^{(j)}$ не противоречит выборке

$$y_\tau^D, \ \tau = \overline{\hat{t}_{j-1}, t}. \tag{8}$$

Если $F(t) \geqslant F^{-1}_{1,\, t-\hat{t}_{j-1}-p_1-1}(1-\alpha)$, то $H_{0t}^{(j)}$ следует отклонить.

$$\hat{t}_j = \min \{t : t > \hat{t}_{j-1},\ F(t) \geqslant F^{-1}_{1,\, t-\hat{t}_{j-1}-p_1-1}(1-\alpha)\}.$$

В правиле (8) $F^{-1}_{1,\, t-\hat{t}_{j-1}-p_1-1}(1-\alpha)$ квантиль порядка $1-\alpha$ распределения Фишера—Снедекора.

Заметим, что параметр нецентральности имеет вид [5]:

$$\delta(t) = (q'(t)\,\Delta\theta_u(t))^2/(M(\xi_t^D)^2 + q'(t)\,V(\hat{\theta}_u(t-1))\,q(t)), \tag{9}$$

где $q'(t)$ — строка с номером t матрицы $Q(T)$,

$$\Delta\theta_u(t) = (\theta_1^{(j)} - \theta_1^{(j-1)} \ldots \theta_p^{(j)} - \theta_p^{(j-1)})'.$$

Статистика (7) может быть вычислена рекуррентным способом, основываясь на теореме из [5]:

Теорема 1. Формула вычисления кумулятивных сумм квадратов отклонений $S(t)$ между экспериментальными и вычисленными по модели наблюдениями имеет вид:

$$S(t) = \begin{cases} S(t-1) + \dfrac{(y_t^D - q'(t)\,\hat{\theta}_u(t-1))^2}{M(\xi_t^D)^2 + q'(t)\,V\,\hat{\theta}_u(t-1)q(t)}, & \text{если } t \geqslant \hat{t}_{j-1} + p \\ S(t-1), \text{ если } t < \hat{t}_{j-1} + p, & S(\hat{t}_{j-1}) = 0. \end{cases}$$

2.5. Свойства решающего правила обнаружения неоднородности.

Лемма. (Связь между нецентральным и центральным законами распределения Фишера — Снедекора)

$$p_{F(n_1,\, n_2,\, \delta)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{k!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^k \cdot p_{F\,(n_1+2k,\ n_2,\ 0)}(x) \cdot c_k(x),\quad x \in R_+^1, \tag{10}$$

где $c_k(x) = \left(\dfrac{n_1}{n_1+2k}\right)^{\frac{n_1+2k}{2}} \cdot \left(\dfrac{n_2 + (n_1+2k)\cdot x}{n_2 + n_1 x}\right)^{\frac{n_1+2k+n_2}{2}}$; $p_{F\,(\cdot,\,\cdot,\,0)}(x)$, $p_{F\,(\cdot,\,\cdot,\,\delta)}(x)$ — плотность распределения вероятностей (п. р. в.) центрального и нецентрального закона Фишера — Снедекора соответственно.

Доказательство леммы следует из явного вида п. р. в. нецентрального закона Фишера — Снедекора.

Теорема 2. Мощность критерия (8) является монотонной функцией параметра нецентральности $\delta(t)$, т. е.

$$W(t) = P(F(t) > F^{-1}_{1,\, t-\hat{t}_{j-1}-p_1-1}(1-\alpha)/\delta(t)) \to 1 \quad \text{при} \quad \delta(t) \to \infty.$$

Доказательство. Обозначим $A = F^{-1}_{1,\, t-\hat{t}_{j-1}-p_1-1}(1-\alpha)$ и $\lambda(t) = \dfrac{\delta(t)}{2}$, тогда из (10):

$$W(t) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k(t)\, e^{-\lambda(t)}}{k!} \int_0^A p_{F\,(n_1+2k,\ n_2,\ 0)}(x)\cdot c_k(x)\,dx \equiv 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k(t) e^{-\lambda(t)}}{k!} F_k.$$

Вычисляя производную $W(t)$ по λ, имеем $\dfrac{dW(t)}{d\lambda} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(F_k - F_{k+1})$.

Интегрируя F_k по частям, легко показать, что $F_k - F_{k+1} > 0$, тогда $\dfrac{dW(t)}{d\lambda} > 0$. Далее, существует константа $0 < L_0 < \infty$, что $F_k \leqslant L_0 \times \left(\dfrac{A + \frac{n_2}{2}}{A + n_2}\right)^k$, откуда:

$$W(t) \geqslant 1 - L_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{A + \frac{n_2}{2}}{A + n_2} \right)^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = 1 - L_0\, e^{-\lambda \frac{n_2}{2(A+n_2)}}.$$

С другой стороны, $W(t) \leqslant 1$, $\forall \lambda$, так как $F_k \geqslant 0$, $\forall k$. Переходя к пределу при $\lambda \to \infty$ в неравенстве $1 - L_0\, e^{-\lambda \frac{n_2}{2(A+n_2)}} \leqslant W(t) \leqslant 1$, получим $\lim\limits_{\lambda \to \infty} W(t) = 1$.

Следствие. Для частного случая модели (1)— «неоднородного» сдвига: $y_t = \theta(t) + \xi_t$, где

$$M\xi_t = 0,\ M(\xi_t \cdot \xi_s) = \rho^{|t-s|},\ |\rho| \leqslant 1,\ t,\ s = \overline{1,\ T}, \tag{11}$$

мощность критерия $W(t)$ возрастает при $\rho \downarrow (-1)$ и убывает при $\rho \uparrow 1$.

Доказательство основано на теореме 2 и выражении для $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \frac{(1-\rho) \cdot (\Delta\theta(t))^2}{(1+\rho) \cdot (1 + (1-\rho)/(1+\rho+(1-\rho)(t-2)))},\ t \geqslant 2,$$

полученном по упрощенным формулам декорреляции [6] для зависимости (11).

3. Программная реализация алгоритма обнаружения неоднородности.

Предложенный критерий (8) реализован в виде паскаль-программы (компилятор турбо-паскаль версии 4,0 и 5,0), которая может быть использована на любой ПЭВМ (ЕС 1840, ЕС 1841) в операционных си-

Результаты моделирования

Коэффициент корреляции															
0,05				0,2				0,4				0,75			
Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки	Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки	Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки	Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки
1	5	1,5	5	1	5	1,5	6	1	5	1,5	нет	1	5	1,5	нет
2	6	1,5	6	2	6	1,5	6	2	6	1,5	нет	3	9	1,5	нет
3	7	1,5	7	3	7	1,5	7	3	7	1,5	нет	11	15	1,5	16
4	10	1,5	10	6	10	1,5	10	4	8	1,5	8	12	16	1,5	16
6	15	1,5	16	12	50	1,5	50	6	9	1,5	9	13	17	1,5	17
8	25	1,5	25	13	5	2	6	8	20	1,5	20	20	50	1,5	50
12	50	1,5	50	14	6	2	6	12	50	1,5	50	21	5	2	6
				24	50	2	50	13	5	2	нет	22	6	2	нет
				25	5	3	5	14	6	2	нет	23	7	2	8
				26	6	3	6	24	7	2	7	24	8	2	8
				36	50	3	50	25	8	2	8	25	9	2	10
								26	20	2	20	26	10	2	10
								36	50	2	50	27	11	2	12
												28	12	2	12
												40	25	2	25

Примечания: одна серия — 10 экспериментов; $\varkappa_1^{(0,75)} = 4{,}8$; $\varkappa_2^{(0,75)} = 0{,}85$; где $\varkappa_1$ — оценка эффективности алгоритма без оператора декорреляции, $\varkappa_2$ — с оператором декорреляции.

стемах *MSDOS*, *PCDOS*, *АДОС*. В качестве примера выбиралась следующая модель:

$$y_t = k_t \sum_{i=1}^{p} \theta_i x_i(t) + \xi_t,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100;\ p = 3,\ J = 1,$$

где $x_1(t) = 1,\ x_{2l}(t) = \cos\left(\frac{2\pi lt}{p}\right),\ x_{2l+1}(t) = \sin\left(\frac{2\pi lt}{p}\right),\ l = \overline{1, \left[\frac{p-1}{2}\right]}$.

Множество переменных $\{\xi_t\}$ — последовательность ошибок наблюдений с характеристиками (11); $k_t \in \{1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3\}$, $\rho \in]-1;\ 1[$.

Из таблицы можно заключить, что для более точного обнаружения момента разладок в условиях усиления корреляции требуется больший объем однородных наблюдений. Оценка эффективности $\varkappa^{(\rho)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |\widehat{t_j^{(k)}} - t_j|$, $m = 10$.

Список литературы

1. Статистические проблемы управления. Вильнюс, 1990. Вып. 89.
2. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М., 1980.
3. Медведев Г. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1981. № 3. С. 46.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М., 1977.
5. Хацкевич Г. А. Обнаружение разладки схоластических систем при коррелированных помехах / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1983. 10 с. Деп. в БелНИИНТИ 27.06.83. № 761 Бе-Д83.
6. Медведев Г. А., Хацкевич Г. А. // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 69.

Поступила в редакцию 30.06.89.

УДК 519.24

МОХАМЕД ГХАЗАЛ (Египет), Н. Н. ТРУШ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАСШИРЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ

Расширенное конечное преобразование Фурье и его свойства. Пусть $x(t)$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — стационарный в широком смысле случайный процесс. Будем предполагать, что $\mathrm{M}\, x(t) = 0$, $R(\tau)$, $\tau \in Z$,— ковариационная функция, а $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi] = \Pi$,— спектральная плотность рассматриваемого процесса.

Пусть $x(0), x(1), \ldots, x(T-1)$ — T последовательных наблюдений за процессом $x(t)$, $t \in Z$. Построим статистику вида:

$$d_T =(\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)}} \sum_{t=0}^{T-1} x(t)\, h(t)\, e^{-i\lambda t},\ \lambda \in \Pi, \tag{1}$$

которую будем называть расширенным конечным преобразованием Фурье, где $h(t)$ — окна просмотра данных, свойства которых достаточно полно изложены в работе [1].

Для статистики $d_T(\lambda)$, $\mathrm{M}\, d_T(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Pi$. Рассмотрим ковариацию расширенного конечного преобразования Фурье.

Теорема 1. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{cov}\{d_T(\lambda_1),\ d_T(\lambda_2)\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\nu)\, \Phi_T(\nu - \lambda_1,\ \nu - \lambda_2)\, d\nu,$$