

Очевидно, что $\overline{K(\varepsilon)} \subset H_h(r)$. Для каждого $z \in \overline{K(\varepsilon)}$ ввиду определения 3 существуют окрестность U_z точки z и голоморфная функция $h_z: U_z \rightarrow \mathbb{C}$ так, что $h_z \times f \in O(U_z, L)$. Рассматриваем $V = \{x \in U_z | h_z(x) = 0\}$ и идеал $J(V)$. Ввиду $H^2(\Delta^h, \mathbb{Z}) = 0$ [8. С. 326—329] существует такая голоморфная функция $\theta \in O(\Delta^h)$, что для всякого $x \in U_z \theta_x$ порождает $J(V)$. Это значит, что существует голоморфная функция $g \in O(\Delta^h)$ так, что $h_z = g_z \times \theta_z$. Ввиду компактности $\overline{K(\varepsilon)}$, можно покрыть $\overline{K(\varepsilon)}$ конечным числом окрестностей U_{z_1}, \dots, U_{z_q} . Тогда существуют такие голоморфные функции $g_{z_1} \times \theta_{z_1}, \dots, g_{z_q} \times \theta_{z_q}$, что $g_{z_i} \times \theta_{z_i} \in O(\Delta^h)$ и $g_{z_i} \times \theta_{z_i} \times f \in O(U_{z_i}, L)$. Следовательно, $g_{z_1} \times \theta_{z_1} \times g_{z_2} \times \theta_{z_2} \times \dots \times g_{z_q} \times \theta_{z_q} \times f \in O(K(\varepsilon), L)$. По лемме 1, последнее отображение продолжается до голоморфного отображения $F_\varepsilon: \Delta^h(1 - \varepsilon) \rightarrow L$. Это значит, что f продолжается до мероморфного отображения $G_\varepsilon: \Delta^h(1 - \varepsilon) \rightarrow L$. Ввиду единственности семейства $\{G_\varepsilon\}$ определит мероморфное отображение $G: \Delta^h \rightarrow L$ и G — продолжение мероморфного отображения f . Предложение 2 доказано.

Теорему 2 теперь можно получить из предложения 2, опираясь на технику доказательства предложения 1.

Список литературы

1. Ивашкович С. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 197.
2. Andreotti A., Stoll W. // Ann. Math. 1960. V. 72. № 2. P. 312.
3. Griffith P. A. // Invent. Math. 1971. V. 14. № 1. P. 27.
4. Hirschowitz A. // Invent. Math. 1974. V. 26. № 2. P. 303.
5. Shiffman B. // Math. Ann. 1971. V. 194. № 4. P. 249.
6. Siu Y. T. // Ann. Math. 1975. V. 102. № 3. P. 421.
7. Shiffman B. // Math. Ann. 1976. V. 222. № 2. P. 171.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., 1985. Т. 2.
9. Docquier F., Grauert H. // Math. Ann. 1960. V. 140. № 2. P. 94.

Поступила в редакцию 11.10.89.

УДК 517.948.32:517.544

Е. А. СЕТЬКО

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРАВИЛЬНЫХ $6n$ -УГОЛЬНИКОВ

1. Рассмотрим правильный $6n$ -угольник S в плоскости комплексного переменного ζ (рис. 1). Стороны его, расположенные в порядке обхода против часовой стрелки, обозначим так:

$$a_1, b_1, c_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, c_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, c_n, a_n^{-1}, b_n^{-1}, c_n^{-1}.$$

Проведем склеивание сторон по правилу: сторона a_k склеивается с a_k^{-1} с помощью отображения симметрии $a_k \leftrightarrow a_k^{-1}$ относительно прямой, проведенной через точку 0. Аналогично склеиваются стороны b_k и b_k^{-1} , а также c_k и c_k^{-1} ($k = 1, \dots, n$). В результате склеивания возникает замкнутое ориентируемое двумерное многообразие рода n . Снабжая это многообразие конформной структурой, индуцируемой комплексными координатами на плоскости ζ и законом склеивания сторон [1], получим риманову поверхность.

Рассмотрим задачу нахождения поля функций f , аналитических в $S \setminus \partial S$, кроме конечного числа полюсов, причем предельные значения этих функций связаны равенством:

$$f[\alpha(\zeta)] = f(\zeta), \quad \zeta \in \partial S \setminus \Lambda, \quad (1)$$

где ∂S — край многоугольника S , Λ — совокупность его вершин, $\alpha: \partial S \setminus \Lambda \rightarrow \partial S \setminus \Lambda$ — описанное выше склеивающее отображение.

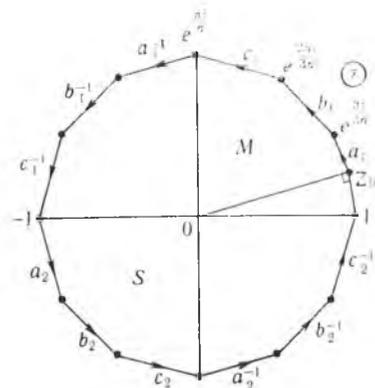


Рис. 1. Правильный $6n$ -угольник S

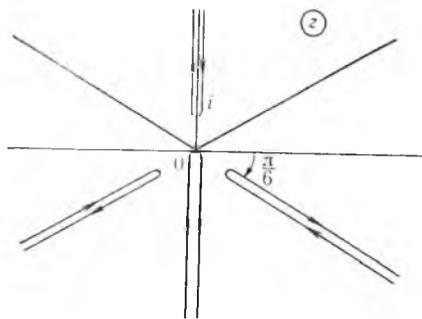


Рис. 2. Образ пятиугольника M

2. Для решения поставленной задачи используем метод конформного склеивания, в основе которого лежит нахождение хотя бы одной непостоянной функции f_0 , удовлетворяющей условию (1). В нашем случае для нахождения функции f_0 используем принцип симметрии.

Пусть $z = f_0(\xi)$ функция, реализующая конформный гомеоморфизм прямоугольного треугольника Δ с вершинами $0, 1, \xi_0$ на область $\left\{ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{6} \right\}$ со следующим соответствием граничных точек:

$$f_0(0) = 0; f_0(1) = \infty; f_0(\xi_0) = e^{-\frac{\pi}{6}i} \cos \frac{\pi}{6},$$

где $\xi_0 = e^{\frac{\pi i}{6n}} \cos \frac{\pi}{6n}$. Эту функцию можно найти исключением переменного τ из уравнений:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{B\left(\frac{1}{6n}; \frac{1}{2}\right)} \int_0^\tau t^{\frac{1}{6n}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt, \\ \tau = \frac{z^3}{z^3-1}, \operatorname{Im} \tau \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Первая из функций в (2) — интеграл Кристоффеля — Шварца [2]. Она реализует конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \tau \geq 0$ на треугольник Δ со следующим соответствием граничных точек:

$$\tau = 0 \leftrightarrow \xi = 0; \tau = 1 \leftrightarrow \xi = 1; \tau = \infty \leftrightarrow \xi = \xi_0.$$

Вторая из функций (2) реализует конформный гомеоморфизм области $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{6}$ и полуплоскости $\operatorname{Im} \tau \geq 0$, при котором

$$z = 0 \leftrightarrow \tau = 0; z = 1 \leftrightarrow \tau = \infty; z = \infty \leftrightarrow \tau = 1.$$

Продолжая построенную функцию $f_0(\xi)$ через прямолинейные участки границы по принципу симметрии Римана — Шварца [2] вокруг начала координат в направлении против часовой стрелки сначала через апофему, а затем через радиус и т. д., получим функцию, аналитическую в S . Обозначим ее f_0 . Докажем, что построенная функция f_0 является искомой. С этой целью заметим, что f_0 реализует конформный гомеоморфизм замкнутого пятиугольника M с вершинами $0, 1, e^{\frac{\pi i}{3n}}, e^{\frac{2\pi i}{3n}}, e^{\frac{\pi i}{n}}$ (рис. 1) на область с краем, которую будем называть листом. На ту же область

с краем функция f_0 отображает пятиугольник, полученный из M поворотом вокруг точки 0 на любой угол, целократный $\frac{\pi}{n}$.

Докажем, что для f_0 выполняется равенство (1). Для этого отметим, что на сторонах a_k и a_k^{-1} функция $\alpha(\zeta)$ совпадает с отображением симметрии относительно радиуса $[0, e^{(6k-4)\frac{\pi i}{3n}}]$ (см. рис. 1). Заметим, что указанному радиусу на листе (рис. 2) соответствует луч $\arg z = \frac{5\pi}{6}$. А стороне a_k соответствуют на листе берега разреза, находящегося в четвертом квадранте (см. рис. 2). Описанная ситуация соответствует тому, что симметричные точки и точки оси симметрии принадлежат одной прямой $\arg z = -\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m = 0, 1$ (см. рис. 2). А так как образом любой точки прямой при симметрии относительно той же прямой является сама эта точка, то равенство (1) для $\zeta \in a_k$ установлено. Аналогично проводятся рассуждения для $\zeta \in b_k$ и $\zeta \in c_k$.

Многоугольник S можно представить в виде объединения замкнутых пятиугольников

$$M, e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot M, e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot M, \dots, e^{(2n-1)\frac{\pi i}{n}} \cdot M, \quad (3)$$

каждый из которых f_0 конформно отображает на лист (см. рис. 2). Считая листы, соответствующие различным пятиугольникам, различными, будем нумеровать их в том порядке, в котором расположены их прообразы в (3).

3. Располагая листы над плоскостью комплексного переменного z , склеим их в соответствии с тем, как в пункте 1 была образована замкнутая поверхность. Закон склеивания листов в окрестности точки $z = 0$ дается подстановкой: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$. В окрестности остальных конечных точек ветвления листы должны склеиваться по закону подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, мы получим замкнутую $2n$ -листную поверхность наложения расширенной плоскости z с известным законом склеивания листов и с известными точками ветвления. Задача свелась к тому, чтобы найти поле алгебраических функций, соответствующих построенной поверхности наложения. Такое поле порождается неприводимым алгебраическим уравнением степени $2n$ по переменной w [4]:

$$w^{2n} + a_1(z)w^{2n-1} + \dots + a_{2n}(z) = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения (4) — неизвестные, их надо найти.

4. При $n = 1$ рассматриваемый многоугольник является правильным шестиугольником, а искомые функции — эллиптическими. Соответствующее этому случаю накрытие листа является двулистным, а искомое алгебраическое уравнение (4) можно взять, например, в виде:

$$v^2 = z(z^3 + i). \quad (5)$$

Для $n > 1$ искомое поле будет расширением степени n поля рациональных функций $R(z, v)$, порожденного уравнением (5). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что функциям поля, порожденного уравнением (5), соответствуют функции, мероморфные в многоугольнике S , удовлетворяющие равенству (1) и дополнительному равенству:

$\hat{f}(e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta) = \hat{f}(\zeta)$, $\zeta \in [0, 1]$. Степень расширения равна n , так как S можно рассматривать как n -листное накрытие его части — многоугольника M_1 (рис. 3), у которого одинаково обозначенные пары сторон считаются склеенными.

Как и в работе [6], группа, порожденная вращением $\zeta \mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta$, — циклическая, рассматриваемое расширение также циклическое. Поэтому алгебраическое уравнение, задающее искомое расширение, можно искать в виде следующего двучленного уравнения:

$$\omega^n = f(z, v),$$

где $f(z, v)$ — некоторая рациональная функция от переменных z и v , связанных уравнением (5).

Таким образом, наша задача свелась к нахождению $f(z, v)$ в (6).

Будем искать эту функцию, во-первых, в виде многочлена, а, во-вторых, в виде $f = \Phi^n$, где Φ — новая неизвестная функция. Функцию Φ будем искать как решение скалярной задачи Римана на римановой поверхности M_1 , т. е. как аналитическую внутри M_1 и удовлетворяющую следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \Phi^+(\zeta) = e^{-\frac{2\pi i}{n}} \Phi^-(\zeta), \zeta \in A, \\ \Phi(\zeta) = \Phi[\alpha(\zeta)], \zeta \in a_1 \cup b_1 \cup c_1, \\ \Phi(\zeta) = \Phi(e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta), \zeta \in d, \end{cases} \quad (7)$$

где линия A является каноническим сечением (см. рис. 3) и служит контуром.

5. Будем решать задачу (7) по схеме, приведенной в [3], посредством сведения к проблеме обращения Якоби. Общее решение этой задачи имеет вид:

$$\Phi(\zeta) = \varphi(\zeta) \exp \left\{ - \int_{\hat{\zeta}}^q \widehat{d\omega}_{\zeta\zeta}(\tau) \right\}, \quad (8)$$

где символом $\widehat{d\omega}_{\zeta\zeta}(\tau)$ обозначен разрывной аналог ядра Коши [3] на M_1 ,

$\hat{\zeta} = e^{\frac{\pi i}{n}}$, а точка q и путь интегрирования определяются из проблемы обращения Якоби. Для того чтобы определить мероморфную всюду на M_1 функцию φ , запишем дивизор экспоненты в (8): $(\hat{\zeta})^{-1}(q)^{-1}$. Отсюда следует, что $\varphi(\zeta)$ в (8) надо подчинить единственному условию $\varphi(q) = 0$.

Считая, что $q \in M_1$, а интегрирование в (8) ведется по прямолинейному отрезку $[\zeta, q]$, можно записать проблему обращения в виде уравнения

$$\omega(q) = \frac{1-n}{n}, \quad (9)$$

где $\omega(q) = \int_{\hat{\zeta}}^q d\omega(\tau)$. В последнем равенстве через $d\omega(\tau)$ обозначен комплексно-нормированный абелев дифференциал 1-го рода на S . Решая проблему обращения (9), получаем функции:

$$\begin{aligned} t_0 &= p \left(\frac{1-n}{n} \sqrt{i} K, 0, 4i \right), \\ h_0 &= p' \left(\frac{1-n}{n} \sqrt{i} K, 0, 4i \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где p и p' — функция Вейерштрасса и ее производная [5], K — нормирующий множитель, который находится из условия:

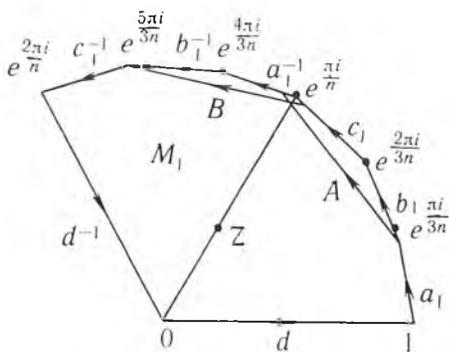


Рис. 3. Многоугольник M_1

$$\frac{1}{K} \int_A \frac{dz}{\sqrt{z(z^3+i)}} = 1.$$

Переменные t и h в (10) связаны соотношением $h^2 = 4t^3 - 4i$. Для перехода в (10) к переменным z и v необходимо сделать замену $z = \frac{1}{t}$.

6. Исходя из решения (8) скалярной задачи Римана получим, что искомую функцию f в (6) можно взять в виде:

$$f(z, v) = [\varphi(\xi)]^n \exp \left\{ -n \int_{\xi}^q \tilde{d\omega}_{\xi\xi}(\tau) \right\}. \quad (11)$$

Осталось найти явные аналитические выражения через z и v для символов, входящих в правую часть (11). В качестве φ в (11) можно взять $\varphi(\xi) = z - z_0$, где $z = f_0(\xi)$, $z_0 = \frac{1}{t_0}$, а t_0 из (10). Правая часть (11) — целая рациональная функция от z, v . Она имеет нуль кратности n в точке $(z_0, -v_0)$ и полюс кратности n над точкой $z = \infty$. В зависимости от четности n возникают два случая. Для четного n искомая функция f будет иметь вид:

$$f(z, v) = (A_0 + A_1 z + \dots + A_{m+2} z^{m+2}) + v(B_0 + \dots + B_m z^m). \quad (12)$$

Если же n нечетно, то дополнительно предполагаем, что $f(0, 0) = 0$, поэтому

$$f(z, v) = (A_1 z + \dots + A_{m+2} z^{m+2}) + v(B_0 + \dots + B_m z^m), \quad (13)$$

где $A_0, \dots, A_{m+2}, B_0, \dots, B_m$ — неопределенные коэффициенты. Их общее число $(2m+3)$, если n нечетно, и $(2m+4)$, если n четно равно n . Для нахождения этих коэффициентов необходимо решить систему n линейных однородных уравнений

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} f(z, v(z)) \right|_{\substack{z=z_0 \\ v=-v_0}} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (14)$$

Существование нетривиального решения системы (14) вытекает из существования нетривиального решения задачи Римана (7).

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 6. С. 64.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
3. Зверович Э. И. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
4. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 6. С. 32.
5. Ахнезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
6. Зверович Э. И., Сетько Е. А. Римановы поверхности правильных $4n$ -угольников / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1990. 17 с. Деп. в ВИНТИ 04.04.90. № 1845-В90.

Поступила в редакцию 30.05.90.

УДК 62-501.7

Г. А. ХАЦКЕВИЧ, А. В. ПОНОМАРЕНКО

ОБНАРУЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПО ЗАВИСИМЫМ ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную многофакторную регрессионную модель, с помощью которой, например, могут быть описаны информационные системы, функционирующие на фоне помех:

$$y_t = \sum_{i=1}^p \theta_i(t) x_i(t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1)$$