где $p(x, y)$ — известная интенсивность распределения нормального давления.

Воспользовавшись формулой для σ_z из (5), при $z=0$ имеем:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\right)_{z_1\to+0} = \Omega(x, y_1) \text{ в обл. } S,$$

где $\Omega(x, y_1) = -\frac{p(x, y)}{\beta\xi} - \left(\frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{\mu^2}\right)Y\dot{\varphi}$.

Из теории потенциала известно, что решение граничной задачи может быть представлено в виде потенциала простого слоя:

$$\varphi(x, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\Omega(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2 + (y_1-\theta_2)^2 + z_1^2}}.$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение для функции $\varphi(x, y_1, z_1)$. Его решение определяется простой квадратурной формулой:

$$\varphi(x, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi\beta\xi}\iint\limits_S \frac{p(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2 + (y_1-\theta_2)^2 + z_1^2}},$$

если $\eta/\xi = \mu^{-2}$ или $a_{23}\sqrt{a_{11}} = a_{13}\sqrt{a_{22}}$.

Для изотропного и трансверсально-изотропного материалов такие соотношения между постоянными упругости выполняются тождественно. При разработке и создании новых анизотропных материалов, обладающих трехосной ортотропией, возможно создание и таких, между модулями упругости которых выполняются указанные выше зависимости.

Список литературы

1. Василевич Ю. В., Прусов И. А. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 83.
2. Василевич Ю. В., Прусов И. А. // Там же. № 2. С. 66.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.

Поступила в редакцию 05.03.91.

УДК 157.535.3:517.55

С. В. РОГОЗИН, ЛЕ МАЮ ХАЙ (СРВ)

ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая работа является дальнейшим развитием исследований различных авторов [1—7] по проблеме продолжения голоморфных и мероморфных отображений.

Определение 1. Пусть X — комплексное многообразие и L — полное локально-выпуклое пространство.

Отображение $f: X \to L$ называется голоморфным на X, если для всякого непрерывного линейного функционала $l: L \to \mathbf{C}$ функция $lf: X \to \mathbf{C}$ голоморфна.

Через $O(X, L)$ обозначим пространство голоморфных отображений $f: X \to L$. $O(X, L)$ можно наделить открыто-компактной топологией. Если L есть пространство Фреше, то сходимость в $O(X, L)$ эквивалентна равномерной сходимости на компактных подмножествах X.

Имеет место следующее:

Предложение 1. Пусть D — открытое подмножество такого многообразия Штейна X, что X есть оболочка голоморфности D и L — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое голоморфное отображение $f: D \to L$ голоморфно продолжается до голоморфного отображения $\hat{f}: X \to L$.

Для доказательства предложения 1 нам необходима

Лемма 1. Пусть $H_k(r)$ — область Гартогса и Δ^k — единичный полидиск в $\mathbf{C}^k$. Пусть L — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое голоморфное отображение $f: H_k(r) \to L$ продолжается до голоморфного отображения $\hat{f}: \Delta^k \to L$.

Доказательство. Напомним, что под областью Гартогса при любом $0 < r < 1$ понимается множество вида:

$$H_k(r) = \left\{ (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \left| \begin{matrix} |z_j| < r, \ 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ |z_k| < 1 \end{matrix} \right. \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \left| \begin{matrix} |z_j| < 1, \ 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ 1 - r < |z_k| < 1 \end{matrix} \right. \right\}.$$

Для произвольного $0 < \varepsilon < r$ рассмотрим:

$$\Delta^k(1-\varepsilon) = \{z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \,|\, |z_j| < 1 - \varepsilon, \ 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

и

$$K(\varepsilon) = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \left| \begin{matrix} |z_j| < r - \varepsilon, \ 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ |z_k| < 1 - \varepsilon \end{matrix} \right. \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \left| \begin{matrix} |z_j| < 1 - \varepsilon \\ 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ 1 - r + \varepsilon < |z_k| < 1 - \varepsilon \end{matrix} \right. \right\}.$$

Очевидно, $\overline{K(\varepsilon)} \subset H_k(r)$.

Для каждого $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \Delta^k(1-\varepsilon)$ составим отображение:

$$F_\varepsilon(z_1, \ldots, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = 1-\varepsilon} \frac{f(z_1, \ldots, z_{k-1}, t)\, dt}{t - z_k}.$$

Отображение $F_\varepsilon: \Delta^k(1-\varepsilon) \to L$ голоморфно в $\Delta^k(1-\varepsilon)$ (см. [8]) и определяет продолжение отображения f. Ввиду единственности семейство $\{F_\varepsilon\}$ задает голоморфное отображение $F: \Delta^k \to L$ и $F|_{Hk(r)} = f$. Лемма доказана.

Определение 2 [5]. Пусть M к-мерное комплексное многообразие. M называется выпуклой областью Гартогса, если всякое голоморфное вложение $\varphi: H_k(r) \to M$ продолжается до голоморфного отображения $\hat{\varphi}: \Delta^k \to M$.

Теорема 1 (Docquier — Grauert) [9]. Пусть M — многообразие Штейна, G — комплексное многообразие и $\Pi: G \to M$ — локально-биголоморфное отображение. Если G есть выпуклая область Гартогса, то G штейново.

Перейдем к доказательству предложения 1.

Пусть $f: D \to L$ — заданное голоморфное отображение. Через E обозначим пучок ростков голоморфных отображений $f: X \to L$, определяемый предпучком $U \mapsto O(U, L)$, где U — произвольное открытое подмножество X. Пусть $\Pi: E \to X$ есть отображение, определяемое $\Pi(x, g_x) = x$, где g_x есть росток голоморфных отображений $g: X \to L$ в точке $x \in X$. Тогда для каждого $x \in X$ $E_x = \Pi^{-1}(x)$ является множеством ростков голоморфных отображений в точке x. Ввиду единственности, E — хаусдорфово пространство.

Пусть G — связная компонента E, содержащая множество $\{f_x | x \in D\}$. G можно наделить структурой комплексного многообразия при помощи локального гомеоморфизма:

$$\Pi_0 = \Pi|_G: \begin{matrix} G \to X. \\ (x, g_x) \mapsto x \end{matrix}$$

Если мы докажем, что Π_0 биективно, то это будет означать, что отображение f голоморфно продолжается до голоморфного отображения $\hat{f}: X \to L$.

Сначала покажем, что G — выпуклая область Гартогса. Пусть $\varphi : H_k(r) \to G$ — произвольное голоморфное вложение, где $k = \dim G = \dim X$. Ввиду штейновости X, отображение $\Pi_0 . \varphi : H_k(r) \to X$ продолжается до голоморфного отображения $\tau : \Delta^k \to X$. Заметим, что τ локально-биголоморфно.

Действительно, рассмотрим: $A = \{ w \in \Delta^k \mid \operatorname{rank}_w \tau < k \}$. Тогда A есть аналитическое подмножество коразмерности 1 в Δ^k и $A \cap H_k(r) = \varnothing$, следовательно, $A = \varnothing$. Это значит, что τ локально-биголоморфно. Определим отображение $e : G \to L$, заданное формулой $e(x, g_x) = g_x(x)$, для каждого $g_x \in G \cap E_x$. Ясно, что e голоморфно. Рассмотрим голоморфное отображение $e . \varphi : H_k(r) \to L$. Ввиду леммы 1, $e . \varphi$ продолжается до голоморфного отображения $h : \Delta^k \to L$. Составим отображение $\widehat{\varphi} : \Delta^k \to E$, заданное формулой

$$\widehat{\varphi}(w) = [h(\tau|_{V_w})^{-1}]_{\tau(w)},$$

где $V_w \subset \Delta^k$ есть достаточно малая окрестность w, на которой τ биголоморфно. Отображение $\widehat{\varphi}$ голоморфно и $\widehat{\varphi}|_{H_{k(r)}} = \varphi$. Так как $\varphi(H_k(r)) \subset G$ и G — связная компонента, то $\widehat{\varphi}(\Delta^k) \subset G$. Следовательно, G — выпуклая область Гартогса. По теореме 1, G — штейново.

Пусть $j : D \to G$ есть отображение, определяемое формулой $j(z) = (z, f_z)$, $z \in D$. Очевидно, j голоморфно и $\Pi_0 \cdot j = \mathrm{id}_D$. Пусть p и q есть точки G такие, что $p \neq q$. Ввиду штейновости G существует голоморфная функция $t : G \to \mathbf{C}$ такая, что $t(p) \neq t(q)$. Так как X есть оболочка голоморфности D, то функция $t \cdot j : D \to \mathbf{C}$ продолжается до голоморфной функции $\hat{t} : X \to \mathbf{C}$. Более того, так как

$$\hat{t}\,\Pi_0|_{j(D)} = t|_{j(D)}, \quad \text{то} \quad \hat{t}.\Pi_0 = t.$$

Следовательно, $\Pi_0(p) \neq \Pi_0(q)$. Таким образом, Π_0 инъективно. Но так как $D \subset \Pi_0(G) \subset X$, $\Pi_0(G)$ — штейново и X есть оболочка голоморфности D, то $\Pi_0(G) = X$. Следовательно, Π_0 биективно и предложение 1 доказано.

Определение 3. Пусть X — комплексное многообразие и L — полное локально-выпуклое пространство. Отображение $f : X \to L$ называется мероморфным, если для каждого $x \in X$ существуют окрестность U_x точки x и скалярная голоморфная функция $h : U_x \to \mathbf{C}$ такие, что $h \times f$ является голоморфным отображением на U_x со значениями в L.

Имеет место

Теорема 2. Пусть D — открытое подмножество такого многообразия Штейна X, что X является оболочкой голоморфности D и L — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое мероморфное отображение $f : D \to L$ продолжается до мероморфного отображения $\hat{f} : X \to L$.

Сначала докажем справедливость теоремы для случая, когда D является областью Гартогса.

Предложение 2. Пусть $H_k(r)$ — область Гартогса, $0 < r < 1$ и L — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое мероморфное отображение $f : H_k(r) \to L$ продолжается до мероморфного отображения $\hat{f} : \Delta^k \to L$.

Доказательство. Произвольно выберем $0 < \varepsilon < r$ и рассмотрим:

$$\Delta^k(1-\varepsilon) = \{ z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \mid |z_i| < 1-\varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant k \}$$

и

$$K(\varepsilon) = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \,\middle|\, \begin{array}{l} |z_i| < r-\varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ |z_k| < 1-\varepsilon \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}^k \,\middle|\, \begin{array}{l} |z_i| < 1-\varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ 1-r+\varepsilon < |z_k| < 1-\varepsilon \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что $\overline{K(\varepsilon)} \subset H_k(r)$. Для каждого $z \in \overline{K(\varepsilon)}$ ввиду определения 3 существуют окрестность U_z точки z и голоморфная функция $h_z : U_z \to \mathbb{C}$ так, что $h_z \times f \in O(U_z, L)$. Рассматриваем $V = \{x \in U_z | h_z(x) = 0\}$ и идеал $J(V)$. Ввиду $H^2(\Delta^k, Z) = 0$ [8. С. 326—329] существует такая голоморфная функция $\theta \in O(\Delta^k)$, что для всякого $x \in U_z \theta_x$ порождает $J(V)$. Это значит, что существует голоморфная функция $g \in O(\Delta^k)$ так, что $h_z = g_z \times \theta_z$. Ввиду компактности $\overline{K(\varepsilon)}$, можно покрыть $\overline{K(\varepsilon)}$ конечным числом окрестностей $U_z, \ldots, U_{z_q}$. Тогда существуют такие голоморфные функции $g_{z_1} \times \theta_{z_1}, \ldots, g_{z_q} \times \theta_{z_q}$, что $g_{z_i} \times \theta_{z_i} \in O(\Delta^k)$ и $g_{z_i} \times \times \theta_{z_i} \times f \in O(U_{z_i}, L)$. Следовательно, $g_{z_1} \times \theta_{z_1} \times g_{z_2} \times \theta_{z_2} \times \ldots \times g_{z_q} \times \theta_{z_q} \times \times f \in O(K(\varepsilon), L)$. По лемме 1, последнее отображение продолжается до голоморфного отображения $F_\varepsilon : \Delta^k(1-\varepsilon) \to L$. Это значит, что f продолжается до мероморфного отображения $G_\varepsilon : \Delta^k(1-\varepsilon) \to L$. Ввиду единственности семейство $\{G_\varepsilon\}$ определит мероморфное отображение $G : \Delta^k \to L$ и G — продолжение мероморфного отображения f. Предложение 2 доказано.

Теорему 2 теперь можно получить из предложения 2, опираясь на технику доказательства предложения 1.

Список литературы

1. Ивашкович С. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 197.
2. Andreotti A., Stoll W. // Ann. Math. 1960. V. 72. № 2. P. 312.
3. Griffith P. A. // Invent. Math. 1971. V. 14. № 1. P. 27.
4. Hirschowitz A. // Invent. Math. 1974. V. 26. № 2. P. 303.
5. Shiffman B. // Math. Ann. 1971. V. 194. № 4. P. 249.
6. Siu Y. T. // Ann. Math. 1975. V. 102. № 3. P. 421.
7. Shiffman B. // Math. Ann. 1976. V. 222. № 2. P. 171.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., 1985. Т. 2.
9. Docquier F., Grauert H. // Math. Ann. 1960. V. 140. № 2. P. 94.

Поступила в редакцию 11.10.89.

УДК 517.948.32:517.544

Е. А. СЕТЬКО

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРАВИЛЬНЫХ $6n$-УГОЛЬНИКОВ

1. Рассмотрим правильный $6n$-угольник S в плоскости комплексного переменного ζ (рис. 1). Стороны его, расположенные в порядке обхода против часовой стрелки, обозначим так:

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_1^{-1},\ b_1^{-1},\ c_1^{-1},\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ a_n^{-1},\ b_n^{-1},\ c_n^{-1}.$$

Проведем склеивание сторон по правилу: сторона a_k склеивается с a_k^{-1} с помощью отображения симметрии $a_k \leftrightarrow a_k^{-1}$ относительно прямой, проведенной через точку 0. Аналогично склеиваются стороны b_k и b_k^{-1}, а также c_k и c_k^{-1} $(k = 1, \ldots, n)$. В результате склеивания возникает замкнутое ориентируемое двумерное многообразие рода n. Снабжая это многообразие конформной структурой, индуцируемой комплексными координатами на плоскости ζ и законом склеивания сторон [1], получим риманову поверхность.

Рассмотрим задачу нахождения поля функций f, аналитических в $S \setminus \partial S$, кроме конечного числа полюсов, причем предельные значения этих функций связаны равенством:

$$f[\alpha(\zeta)] = f(\zeta),\ \zeta \in \partial S \setminus \Lambda, \tag{1}$$

где ∂S — край многоугольника S, Λ — совокупность его вершин, α: $\partial S \setminus \Lambda \to \partial S \setminus \Lambda$ — описанное выше склеивающее отображение.