

УДК 539.3.01

И. А. ПРУСОВ, Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА, ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В [1] изложен вывод общих формул для компонент напряжений и перемещений трехмерного ортотропного тела, основывающийся на специальном представлении составляющих упругого состояния через квазигармонические функции. Для решения основных граничных задач общие формулы преобразованы на основе осуществления довольно сложного предельного перехода для ряда функций [2]. В настоящей работе изложен другой подход к выводу общих формул, не требующий предельного перехода, дающий возможность получить расчетные формулы более простым и эффективным методом. Как и в [1, 2], предполагается, что между коэффициентами упругости имеется определенная зависимость.

Пусть u, v, w — компоненты перемещений, отнесенные к осям декартовых координат x, y, z ; σ_{ij}, τ_{ij} и e_{ij} — компоненты напряжений и деформаций, удовлетворяющие уравнениям закона Гука:

$$a_{ij}\sigma_{jj} = e_{ii}, \quad a_{44}\tau_{yz} = e_{yz}, \quad a_{55}\tau_{xz} = e_{xz}, \quad a_{66}\tau_{xy} = e_{xy} \quad (1)$$

и, при отсутствии массовых сил, уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Трем дифференциальным уравнениям равновесия удовлетворим, если положим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Phi_i = \Phi_i(x, y, z)$ — некоторые дифференцируемые функции переменных x, y, z ; μ, λ — безразмерные коэффициенты.

Выразим компоненты перемещения u, v, w по формулам:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial}{\partial x} (A_{11}\Phi_1 + A_{12}\Phi_2 + A_{13}\Phi_3), \\ v &= -\frac{\partial}{\partial y} (A_{21}\Phi_1 + A_{22}\Phi_2 + A_{23}\Phi_3), \\ w &= -\frac{\partial}{\partial z} (A_{31}\Phi_1 + A_{32}\Phi_2 + A_{33}\Phi_3), \end{aligned} \quad (3)$$

где A_{ij} — произвольные вещественные коэффициенты.

Удовлетворяя уравнениям закона Гука для касательных напряжений при помощи равенств (2), (3), найдем значения постоянных A_{ij} :

$$A_{11}=A_{21}=-A_{31}=0,5 a_{66},$$

$$A_{22}=A_{32}=-A_{12}=0,5 a_{44},$$

$$A_{33}=A_{13}=-A_{23}=0,5 a_{55}.$$

Представим функции $\Phi_i(x, y, z)$ в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \beta(z\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) + \dot{\varphi}(x, y, z)), \\ \Phi_2 &= \beta\eta(z\varphi(x, y, z) + \dot{\varphi}(x, y, z)), \\ \Phi_3 &= \beta\xi(z\varphi(x, y, z) + \dot{\varphi}(x, y, z)),\end{aligned}\quad (4)$$

где $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ — квазигармонические функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$(X + \mu^{-2}Y + \lambda^{-2}L)\varphi(x, y, z) = 0, \quad (X + \mu^{-2}Y + \lambda^{-2}L)\psi(x, y, z) = 0.$$

Здесь $X = \partial^2/\partial x^2$, $Y = \partial^2/\partial y^2$, $L = \partial^2/\partial z^2$; $\dot{\varphi}(x, y, z) = \int_z^\infty \varphi(x, y, z) dz$,

$$\partial\dot{\varphi}(x, y, z)/\partial z = -\varphi(x, y, z), \quad \partial\varphi(x, y, z)/\partial z = -L\dot{\varphi}(x, y, z);$$

β, ξ, η — произвольные постоянные.

С учетом выражений (4) формулы (2), (3) запишем в форме:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \beta[z(Y + \xi L)\varphi + Y(\psi + \dot{\varphi}) - \xi L\dot{\varphi}], \\ \sigma_y &= \beta[z(X + \eta L)\varphi + X(\psi + \dot{\varphi}) - \eta L\dot{\varphi}], \\ \sigma_z &= \beta[z(\xi X + \eta Y)\varphi + (\xi X + \eta Y)\dot{\varphi}], \\ \tau_{xy} &= -\beta\left[z\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\psi + \dot{\varphi})\right], \\ \tau_{yz} &= -z\beta\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \quad \tau_{xz} = -z\beta\xi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z},\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{\beta}{2}\left[z(a_{44}\eta - a_{55}\xi - a_{66})\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (a_{44}\eta - a_{55}\xi - a_{66})\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} - a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right], \\ v &= \frac{\beta}{2}\left[z(a_{55}\xi - a_{44}\eta - a_{66})\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a_{55}\xi - a_{44}\eta - a_{66})\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial y} - a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right], \\ w &= \frac{\beta}{2}\left[z(a_{66} - a_{44}\eta - a_{55}\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right].\end{aligned}$$

Удовлетворим уравнениям закона Гука для нормальных напряжений. Для этого в (1) подставим выражения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, u, v, w$, которые определены по формулам (5). Каждое полученное равенство представим в виде суммы двух выражений, одно из которых будет содержать множитель z .

Приравнявая нулю каждое из выражений, получим две системы дифференциальных уравнений.

Выпишем выражения при множителе z :

$$\begin{aligned}X\left[a_{12} + a_{13}\xi + \frac{1}{2}(a_{66} - a_{44}\eta + a_{55}\xi)\right]\varphi + Y(a_{11} + a_{13}\eta)\varphi + \\ + L(a_{11}\xi + a_{12}\eta)\varphi = 0, \\ X(a_{22} + a_{23}\xi)\varphi + Y\left[a_{12} + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(a_{66} + a_{44}\eta - a_{55}\xi)\right]\varphi + \\ + L(a_{12}\xi + a_{22}\eta)\varphi = 0, \\ X(a_{23} + a_{33}\xi)\varphi + Y(a_{13} + a_{33}\eta)\varphi + \\ + L\left[a_{13}\xi + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(-a_{66} + a_{44}\eta + a_{55}\xi)\right]\varphi = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Выпишем систему уравнений, не содержащих множителя z :

$$\begin{aligned}
 & X \left[a_{12} \dot{\psi} + a_{12} \dot{\phi} + a_{13} \dot{\xi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\psi} + \frac{1}{2} (a_{66} - a_{44} \eta + a_{55} \xi) \dot{\phi} \right] + \\
 & + Y (a_{11} \dot{\psi} + a_{11} \dot{\phi} + a_{13} \eta \dot{\phi}) - L (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) \dot{\phi} = 0. \\
 & X (a_{22} \dot{\psi} + a_{22} \dot{\phi} + a_{23} \dot{\xi} \dot{\phi}) + Y \left[a_{12} \dot{\psi} + a_{12} \dot{\phi} + a_{23} \eta \dot{\phi} + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\psi} + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} (a_{66} + a_{44} \eta - a_{55} \xi) \dot{\phi} \right] - L (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) \dot{\phi} = 0, \quad (7) \\
 & X (a_{23} \dot{\psi} + a_{23} \dot{\phi} + a_{33} \dot{\xi} \dot{\phi}) + Y (a_{13} \dot{\psi} + a_{13} \dot{\phi} + a_{33} \eta \dot{\phi}) - \\
 & - L \left[a_{13} \dot{\xi} \dot{\phi} + a_{23} \eta \dot{\phi} + \frac{1}{2} (-a_{66} + a_{44} \eta + a_{55} \xi) \dot{\phi} + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\psi} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при операторах X , Y , L в системах (6), (7) совпали. Для этого необходимо положить в (7):

$$X \left(a_{12} + \frac{1}{2} a_{66} \right) \dot{\psi} + Y a_{11} \dot{\psi} = 2L (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) \dot{\phi}, \quad (8)$$

$$X a_{22} \dot{\psi} + Y \left(a_{12} + \frac{1}{2} a_{66} \right) \dot{\psi} = 2L (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) \dot{\phi}, \quad (9)$$

$$X a_{23} \dot{\psi} + Y a_{13} \dot{\psi} - \frac{1}{2} a_{66} L \dot{\psi} = 2L \left[a_{13} \dot{\xi} + a_{23} \eta + \frac{1}{2} (-a_{66} + a_{44} \eta + a_{55} \xi) \right] \dot{\phi}. \quad (10)$$

При зависимости между постоянными упругости ортотропного тела [1]

$a_{66} = 2(\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12})$, $a_{55} = 2(\sqrt{a_{11}a_{33}} - a_{13})$, $a_{44} = 2(\sqrt{a_{22}a_{33}} - a_{23})$ уравнения (8), (9) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}
 X \sqrt{a_{22}} \dot{\psi} + Y \sqrt{a_{11}} \dot{\psi} &= \frac{2}{\sqrt{a_{11}}} L (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) \dot{\phi}, \\
 X \sqrt{a_{22}} \dot{\psi} + Y \sqrt{a_{11}} \dot{\psi} &= \frac{2}{\sqrt{a_{22}}} L (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) \dot{\phi}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Правые части выражений (11) совпадут, если

$$\sqrt{a_{22}} (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) = \sqrt{a_{11}} (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta). \quad (12)$$

Из (12) имеем $\eta/\xi = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$.

Таким образом, среди уравнений (8)–(10) существуют два линейно независимых соотношения (9), (10). Из них найдем выражения $X\dot{\psi}$ и $Y\dot{\psi}$. Поскольку $X\dot{\psi} + \mu^{-2}Y\dot{\psi} = -\lambda^{-2}L\dot{\psi}$, то с учетом найденных выражений $X\dot{\psi}$ и $Y\dot{\psi}$, после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left\{ \left(a_{13} - \frac{a_{23}}{\mu^2} \right) (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) + \left(\frac{a_{22}}{\mu^2} - \sqrt{a_{11}a_{22}} \right) \left[a_{13} \dot{\xi} + a_{23} \eta + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{1}{2} (-a_{66} + a_{44} \eta + a_{55} \xi) \right] \right\} \\
 \dot{\psi} &= - \frac{\lambda^{-2} (a_{13}a_{22} - a_{23} \sqrt{a_{11}a_{22}}) + (\mu^{-2} a_{22} - \sqrt{a_{11}a_{22}}) 0,5 a_{66}}{\lambda^{-2} (a_{13}a_{22} - a_{23} \sqrt{a_{11}a_{22}}) + (\mu^{-2} a_{22} - \sqrt{a_{11}a_{22}}) 0,5 a_{66}} \dot{\phi}.
 \end{aligned}$$

Систему уравнений (6) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 & X\dot{\phi} + \frac{a_{11} + a_{13}\eta}{a_{12} + a_{13}\xi + \frac{1}{2}(a_{66} - a_{44}\eta + a_{55}\xi)} Y\dot{\phi} + \\
 & + \frac{a_{11}\xi + a_{12}\eta}{a_{12} + a_{13}\xi + \frac{1}{2}(a_{66} - a_{44}\eta + a_{55}\xi)} L\dot{\phi} = 0, \\
 & X\dot{\phi} + \frac{a_{12} + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(a_{66} + a_{44}\eta - a_{55}\xi)}{a_{22} + a_{23}\xi} Y\dot{\phi} + \frac{a_{12}\xi + a_{22}\eta}{a_{22} + a_{23}\xi} L\dot{\phi} = 0,
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$X\varphi + \frac{a_{12} + a_{33}\eta}{a_{23} + a_{33}\xi} Y\varphi + \frac{a_{13}\xi + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(-a_{66} + a_{44}\eta + a_{55}\xi)}{a_{23} + a_{33}\xi} L\varphi = 0.$$

Уравнения (13) будут тождественно удовлетворены, если положить

$$\mu^2 = \frac{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \xi\left(a_{13} + \frac{a_{55}}{2}\right) - \frac{\eta a_{44}}{2}}{a_{11} + \eta a_{13}} = \frac{a_{23} + \xi a_{33}}{a_{13} + \eta a_{33}} =$$

$$= \frac{a_{22} + \xi a_{23}}{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \eta\left(a_{23} + \frac{a_{44}}{2}\right) - \frac{\xi a_{55}}{2}}; \quad (14)$$

$$\lambda^2 = \frac{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \xi\left(a_{13} + \frac{a_{55}}{2}\right) - \frac{\eta a_{44}}{2}}{a_{11}\xi + a_{12}\eta} = \frac{a_{22} + \xi a_{23}}{a_{12}\xi + \eta a_{22}} =$$

$$= \frac{a_{23} + \xi a_{33}}{\xi\left(a_{13} + \frac{a_{55}}{2}\right) + \eta\left(a_{23} + \frac{a_{44}}{2}\right) - \frac{a_{66}}{2}}. \quad (15)$$

Системы уравнений (14), (15) исследованы в [1]. Воспользовавшись некоторыми конечными результатами [1], приведем выражения для λ , μ , ξ , η :

$$\lambda^2 = a_{44}/a_{66}, \quad \mu^2 = \frac{a_{23} + a_{33}\xi}{a_{13} + a_{33}\eta}, \quad \xi = a_{22}a_{66}/2\Delta, \quad \eta = a_{66}\sqrt{a_{11}a_{22}}/2\Delta,$$

$$\Delta = a_{22}(2a_{11}a_{44}/a_{66} - a_{13} - 0,5a_{55}) - a_{12}(2a_{12}a_{44}/a_{66} + 0,5a_{44} - a_{23}).$$

Сопоставляя выражения (5) с ранее полученными формулами [2] для компонент напряжений и перемещений ортотропного полупространства, находящегося под действием нормальной нагрузки, найдем

$$\beta = \frac{\alpha_3}{\lambda} = - \frac{2\xi\alpha_2}{\xi + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}},$$

$$\text{где } \alpha_2 = \frac{a_{11} + 2a_{12}}{2a_{11}(a_{11} - a_{12})}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0,5a_{22}a_{66}\sqrt{a_{44}a_{66}}(a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}})\Delta^{-2}.$$

При отсутствии касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} на граничной плоскости $z=0$ полупространства задача об определении напряженно-деформированного состояния в исследуемой пространственной области сводится к определению квазигармонической функции $\varphi(x, y, \lambda z)$ всюду в рассматриваемой области, кроме границы S на $z=0$, подверженной действию нормальной нагрузки. Функция φ стремится к нулю на достаточно больших расстояниях от S ; ее поведение на бесконечности описывается соотношением P/R , где $P = \int_S p(x, y) dx dy$ — главный вектор распределенной по S нагрузки $p(x, y)$; $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат, расположенного внутри площадки загрузка S , до точки наблюдения.

В частности, полагая

$$\Phi_1 = z\alpha\varphi + \psi + \alpha\dot{\varphi},$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 = z\alpha\varphi + \alpha\dot{\varphi},$$

где $\alpha = (a_{11} - a_{12})^{-1}$, $\psi = -2\alpha a_{11}^{-1}(a_{11} + a_{12})\dot{\varphi}$, получим общие формулы для компонент напряжений и перемещений для изотропного полупространства, которые совпадают с известными формулами Л. А. Галина [3], полученными другим путем.

В качестве примера практического использования полученных формул дадим решение первой основной задачи. Пусть на поверхности полупространства заданы внешние усилия

$$\sigma_z = -p(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{на } S,$$

где $p(x, y)$ — известная интенсивность распределения нормального давления.

Воспользовавшись формулой для σ_z из (5), при $z=0$ имеем:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right)_{z_1 \rightarrow +0} = \Omega(x, y_1) \text{ в обл. } S,$$

$$\text{где } \Omega(x, y_1) = - \frac{p(x, y)}{\beta \xi} - \left(\frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{\mu^2} \right) Y \dot{\Phi}.$$

Из теории потенциала известно, что решение граничной задачи может быть представлено в виде потенциала простого слоя:

$$\Phi(x, y_1, z_1) = - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\Omega(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2 + (y_1-\theta_2)^2 + z_1^2}}.$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение для функции $\Phi(x, y_1, z_1)$. Его решение определяется простой квадратурной формулой:

$$\Phi(x, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi\beta\xi} \iint_S \frac{p(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2 + (y_1-\theta_2)^2 + z_1^2}},$$

если $\eta/\xi = \mu^{-2}$ или $a_{23} \sqrt{a_{11}} = a_{13} \sqrt{a_{22}}$.

Для изотропного и трансверсально-изотропного материалов такие соотношения между постоянными упругости выполняются тождественно. При разработке и создании новых анизотропных материалов, обладающих трехосной ортотропией, возможно создание и таких, между модулями упругости которых выполняются указанные выше зависимости.

Список литературы

1. Василевич Ю. В., Прусов И. А. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 83.
2. Василевич Ю. В., Прусов И. А. // Там же. № 2. С. 66.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.

Поступила в редакцию 05.03.91.

УДК 157.535.3:517.55

С. В. РОГОЗИН, ЛЕ МАЮ ХАЙ (СРВ)

ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая работа является дальнейшим развитием исследований различных авторов [1—7] по проблеме продолжения голоморфных и мероморфных отображений.

Определение 1. Пусть X — комплексное многообразие и L — полное локально-выпуклое пространство.

Отображение $f: X \rightarrow L$ называется голоморфным на X , если для всякого непрерывного линейного функционала $l: L \rightarrow \mathbb{C}$ функция $lf: X \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна.

Через $O(X, L)$ обозначим пространство голоморфных отображений $f: X \rightarrow L$. $O(X, L)$ можно наделять открыто-компактной топологией. Если L есть пространство Фреше, то сходимость в $O(X, L)$ эквивалентна равномерной сходимости на компактных подмножествах X .

Имеет место следующее:

Предложение 1. Пусть D — открытое подмножество такого многообразия Штейна X , что X есть оболочка голоморфности D и L — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое голоморфное отображение $f: D \rightarrow L$ голоморфно продолжается до голоморфного отображения $\tilde{f}: X \rightarrow L$.