Отметим, что в частном случае $m=2$ $(n=4)$ однородное пространство N можно рассматривать как однородное пространство пар двумерных подпространств четырехмерного векторного пространства, которые также можно интерпретировать как пространство пар прямых (общего положения) в трехмерном проективном пространстве.

Если определить G-пространство

$$\bar{Q}=\{(y, z, u)\,|\,y=aJa^{-1},\ z=a\varepsilon_0a^{-1},\ u=a\varepsilon a^{-1}\},$$

то из равенств $u=yz$, $y=uz$, $z=uy$ получим три изоморфных пространства:

$$Q_0=\{(y, z)\,|\,y=aJa^{-1},\ z=a\varepsilon_0a^{-1}\},$$
$$Q_1=\{(y, u)\,|\,y=aJa^{-1},\ u=a\varepsilon a^{-1}\},$$
$$Q_2=\{(z, u)\,|\,z=a\varepsilon_0a^{-1},\ u=a\varepsilon a^{-1}\}.$$

Соответствующие отображения изоморфизма имеют вид:

$$Q_0\to\bar{Q}:(y, z)\to(y, z, yz),$$
$$Q_1\to\bar{Q}:(y, u)\to(y, uy, u),$$
$$Q_2\to\bar{Q}:(z, u)\to(uz, z, u).$$

В частности, в случае $n=4$ при интерпретации элементов z и u парами прямых проективного трехмерного пространства получим, что задание двух пар y, z влечет за собой задание комплексной структуры.

Отметим, что две пары прямых, определенных инволюциями y и z, отличаются тем, что соответствующие пары не имеют общих точек, и задание пары (при условии, что пара y задана) сводится к заданию одной из прямых пары. В самом деле, из условия $zu+uz=0$ следует, что собственные векторы $\bar{x}$ инволюции u, удовлетворяющие условию $u\bar{x}=\pm\bar{x}$, удовлетворяют также условию $u(z\bar{x})=-zu\bar{x}=-z\bar{x}$. Следовательно,

$$z[V^+]=V^-,\ z[V^-]=V^+,$$

где через V^+ (V^-) обозначено линейное подпространство, состоящее из собственных векторов оператора u, соответствующих собственному значению $+1$ (-1).

Таким образом, пара подпространств (V^+, V^-) имеет вид: $(V^+, z[V^+])$, и в случае задания пары (z, u) достаточно задать одно из подпространств, например, V^+. Аналогичное утверждение имеет место и в случае задания пары (y, u) (что эквивалентно заданию тройки (y, z, u)), т. е. $(V^+, V^-)=(V^+, y(V^+))$.

Это верно в случае $n=4$, т. е. для задания пары прямых, определенных u, достаточно определить одну из прямых (считая, что задан элемент $(z, u)\in Q_2$).

Список литературы

1. Ведерников С. В. // Проблемы геометрии. 1983. Т. 15. С. 165.
2. Ведерников С. В. Там же. 1975. Т. 7. С. 49.

Поступила в редакцию 07.02.90.

УДК 517.9

О. А. МОРОЗ

К ВОПРОСУ О НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Проблема неасимптотической устойчивости положений равновесия является одной из сложных задач качественной теории динамических систем. Это отчетливо проявляется в таких вопросах, как теория критических случаев [1], [2], устойчивость множества неизолированных положений равновесия [3]. Этой же проблеме посвящены работы [4] и [5].

Продолжая исследование устойчивости по Ляпунову неизолированных состояний равновесия, рассмотрим существенно нелинейные системы дифференциальных уравнений в ситуации, когда множество точек покоя системы образует поверхность, размерность которой на единицу меньше размерности фазового пространства.

Пусть R^k означает вещественное евклидово пространство размерности k, R — вещественная прямая. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать одну из норм пространства R^k. Вектор $x \in R^k$ означает вектор-столбец, x' — вектор-строка, т. е. «$'$» — операция транспонирования. Далее, пусть $\varkappa : R \to R$ непрерывная функция такая, что $\varkappa(0) = 0$ и $\varkappa(r) \neq 0$, если $r \neq 0$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [5], [6]

$$\dot{x} = \varkappa(\varphi(x)) \cdot Ax, \quad x \in R^{2n}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая голоморфная функция переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, разлагающаяся в ряды по степеням x в некоторой окрестности $\|x\| \leqslant \rho$, $\rho > 0$; A — $(2n \times 2n)$ постоянная матрица. Предполагаем, что каждое решение $x(p, t)$ системы (1) с начальным условием $\|p\| < \sigma$ определено при всех значениях $t \in R$.

Наряду с системой (1) рассмотрим следующую

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in R^{2n}, \tag{2}$$

с той же матрицей A.

Пусть вещественная матрица A имеет лишь комплексные собственные значения, которые обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$.

Так как решение линейной системы (2) с начальным условием $y(p, 0) = p$ имеет вид $y(p, t) = e^{At} \cdot p$, запишем функцию $\xi(t) = c'y(p, t)$ следующим образом:

$$\xi(t) = c'e^{At}p = c'e^{At}\frac{p}{\|p\|} \cdot \|p\| = c'e^{At}d \cdot \|p\|, \quad \|d\| = 1,$$

где c — постоянный вектор из R^{2n}.

В [5] доказано следующее утверждение.

Лемма. Если $c \neq 0$ и выполняется условие

$$\operatorname{Im} \mu_j \neq 0, \quad \forall_j = \overline{1, 2n}, \tag{3}$$

то найдутся такие положительные числа $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, что для любого начального состояния d, $\|d\| = 1$, функция $\psi(t) = c'e^{At} \cdot d$ в некоторых точках как отрезка $[0, T]$, так и отрезка $[-T, 0]$ принимает значения больше ε и меньше $-\varepsilon$.

Будем считать, что функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = c'x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x), \tag{4}$$

где $P_k(x) = \sum\limits_{i_1 + \ldots + i_s = k} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_s^{i_s}$ — однородные полиномы степени k с вещественными коэффициентами $\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$, и ряд в правой части (4) абсолютно сходится в шаре $\|x\| \leqslant \rho$, $\rho > 0$.

Обозначим через a_k сумму модулей чисел $\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$, т. е.

$$a_k = \sum_{i_1 + \ldots + i_s = k} |\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s}|, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть функция $\varphi : R^{2n} \to R$ определяется соотношением (4), причем $c \neq 0$ и выполняется условие

$$R = \varlimsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} < +\infty, \tag{6}$$

где a_k задаются формулой (5). Тогда, если собственные числа μ_j, $j = \overline{1, 2n}$ удовлетворяют условию (3), то существуют такие положительные числа $\sigma > 0$ и $T > 0$, что всякое решение $y(p, t)$ уравнения (2) при норме $\|p\| < \sigma$ попадает на поверхность

$$c'x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x) = 0 \tag{7}$$

как при $0 \leqslant t \leqslant T$, так и при $-T \leqslant t \leqslant 0$.

Доказательство теоремы проводится с учетом вышеуказанной леммы и известной оценки (см. [7]).

Сформулируем основной результат об устойчивости.

Теорема 2. Если $c \neq 0$, выполняются условия (3) и (6), то нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть требования теоремы выполняются. Тогда из теоремы 1 следует, что для любого начального состояния p с нормой $\|p\| < \sigma$ решение $y(p, t)$ системы (2) попадает на поверхность (7) при некотором значении $t \in [0, T]$, а также и при $t \in [-T, 0]$, где $T > 0$ не зависит от p.

Обозначим через $t_p^+ > 0$ и $t_p^- < 0$ моменты времени, в которые решение $y(p, t)$, $\varphi(p) \neq 0$, первый раз (считая от точки $t = 0$ соответственно вправо и влево) попадает на поверхность (7). Выберем число $\sigma_1 < \min(\sigma, \rho)$, $\sigma_1 > 0$. Учитывая неравенства (см. [7])

$$\| y(p, t) \| \leqslant h \cdot \exp(\bar{\alpha} \cdot T) \cdot \| p \|, \ \forall t \in [0, T]$$

и

$$\| y(p, t) \| \leqslant h_1 \cdot \exp(-\underline{\alpha} \cdot T) \cdot \| p \|, \ \forall t \in [-T, 0],$$

где $\bar{\alpha} = \max_j |\operatorname{Re} \mu_j|$, $\underline{\alpha} = \min_j |\operatorname{Re} \mu_j|$; h, h_1 — некоторые положительные постоянные, будем иметь:

$$\| y(p, t) \| \leqslant \beta \cdot \| p \| \ \text{для} \ \| p \| < \sigma_1, \ \forall t \in [t_p^-, t_p^+],$$

где $\beta = \beta(T) > 0$ некоторое число.

Выделим на интервале $[t_p^-, t_p^+]$ два отрезка траекторий системы (2) $y^+(p, t) = \{y \in R^{2n} \mid y(p, t) = y, \ t \in (0, t_p^+)\}$ и $y^-(p, t) = \{y \in R^{2n} \mid y(p, t) = y, \ t \in (t_p^-, 0)\}$. Тогда, поскольку система (1) получена из системы (2) методом «замораживания» [5], отрезки траектории $y^+(p, t)$, $y^-(p, t)$ будут совпадать с одной из полутраекторий $x(p, R^+)$ или $x(p, R^-)$ системы (1) в зависимости от того, совпадают или противоположны направления движений (см. [5]) систем (1) и (2).

Отсюда следует, что для решения $x(p, t)$ системы (1) при $\|p\| < \sigma_1$ справедлива оценка

$$\| x(p, t) \| \leqslant \beta \| p \|, \ \forall t \geqslant 0.$$

Так как постоянная β не зависит от числа σ_1, то это означает, что нулевое решение уравнения (1) устойчиво на множестве начальных состояний и, следовательно, устойчиво по Ляпунову.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1956. Т. 2.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
3. Матросов В. М. // Тр. Авиац. ин-та. Мат. и мех. 89. Казань, 1965. С. 20.
4. Абаньшин А. М. // Вестн. ЛГУ. 1968. № 7. С. 5.
5. Калитин Б. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 3. С. 39.
6. Мороз О. А. К устойчивости неизолированной точки покоя в критическом случае / Редкол. журн. «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук». Минск, 1988. С. 6. Деп. в ВИНИТИ 13.10.88. № 7401-В88.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. С. 57.

Поступила в редакцию 21.06.89.