Решениями задачи б) могут быть как поверхностные, так и внутренние волны. Действительно, уравнение (14) имеет два комплексно-сопряженных корня: $-b_1 \pm i\sigma_1$, $-b_2 \pm i\sigma_2$; пусть, например, $0 < \delta_1 < 1$, $\delta_2 > 1$ (см. (15)). Тогда первая волна, характеризуемая параметрами b_1, σ_1, будет поверхностной: поверхности ζ_1, ζ_2 колеблются в одной фазе, причем амплитуда колебания поверхности раздела меньше амплитуды колебания свободной поверхности $a\delta_1 < a$. Волна с параметрами b_2, σ_2 — внутренняя: ζ_1, ζ_2 колеблются в противофазе и $a\delta_2 > a$.

Список литературы

1. Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны. Киев, 1970.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, 1976.
3. Слезкин Н. А. Динамика низкой несжимаемой жидкости. М., 1955.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л., 1947.

Поступила в редакцию 23.11.89.

УДК 519.6

В. А. ДРАГУН, Н. П. ФЕДЕНКО

О МЕТОДЕ ЧЕБЫШЕВА

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0, \qquad (1)$$

где $F : D \subset X \to Y$, X и Y — банаховы пространства. Для решения уравнения (1) применим метод Чебышева, по которому для заданного начального приближения x_0 последующие приближения определяются по формуле

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1}\left[F(x_k) + \frac{1}{2}F''(x_k)\left(-(F'(x_k))^{-1}F(x_k)\right)^2\right], \qquad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Среди работ по исследованию метода Чебышева в случае функциональных пространств отметим работы [1—4]. В данной статье приведены достаточные условия сходимости метода Чебышева и оценка погрешности, а с помощью параметризации задачи (1) ослаблены условия на выбор начального приближения x_0.

В дальнейшем x_{k+1} будем определять по формулам

$$x_{k+1} = \tilde{x}_k - \frac{1}{2}\Gamma_k F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2, \qquad (3)$$

где

$$\tilde{x}_k = x_k - \Gamma_k F(x_k), \quad \Gamma_k = [F'(x_k)]^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Теорема 1. Пусть оператор F определен в шаре $S = \{x : \|x - x_0\| \leqslant 2\delta\}$ банахова пространства X, действует в банахово пространство Y и удовлетворяет условиям:

1) существует решение x^* уравнения (1) такое, что $\|x^* - x_0\| \leqslant \delta$;
2) для любого $x \in S$ существует $\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}$ и $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$;
3) $\|F''(x_0)\| \leqslant M$;
4) $\|F''(x) - F''(y)\| \leqslant K\|x - y\|$ для любых x и $y \in S$;
5) $h = \delta a < 1$, где $a = \sqrt{\frac{1}{2}BK + \frac{1}{8}B^3M_1^3\delta + \frac{1}{2}B^2M_1^2}$, $M_1 = 2K\delta + M$.

Тогда последовательность $\{x_k\}$, образованная по (3), (4), начиная с x_0, содержится в S, сходится к x^* и имеет место оценка

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \delta h^{3^k - 1}. \qquad (5)$$

Доказательство. Применим метод индукции. Предположим, что $x_k \in S$, $k > 1$, и покажем, что $x_{k+1} \in S$. То, что $x_1 \in S$, доказывается аналогично. Сначала оценим $\|F''(x)\|$ для $\forall x \in S$: $\|F''(x)\| = \|F''(x) - F''(x_0) + F''(x_0)\| \leqslant 2K\delta + M = M_1$. Далее, используя (4), имеем

$$\|\tilde{x}_k - x^*\| \leqslant \frac{1}{2} BM_1 \|x^* - x_k\|^2 < \delta. \tag{6}$$

Наконец, оценим $\|x_{k+1} - x^*\|$:

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \left\| x_k - x^* - \Gamma_k F(x_k) - \frac{1}{2}\Gamma_k F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Gamma_k\| \cdot \left\| F(x^*) - F(x_k) - F'(x_k)(x^* - x_k) - \frac{1}{2} F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} B (K \|x_k - x^*\|^3 + M_1 \|\tilde{x}_k - x^*\|^2 + 2M_1 \|x^* - x_k\| \cdot \|\tilde{x}_k - x^*\|) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} BK + \frac{1}{8} B^3 M_1^3 \delta + \frac{1}{2} B^2 M_1^2\right) \|x_k - x^*\|^3 \leqslant a^2 \|x_k - x^*\|^3.$$

Следовательно, по условию 5) теоремы имеем

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant a^2 \|x_k - x^*\|^3 < \delta, \tag{7}$$

или

$$\|x_{k+1} - x_0\| < 2\delta.$$

Из неравенства (7) получим оценку

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant \frac{1}{a}(a\|x_k - x^*\|)^3 \leqslant \delta h^{3^{k+1}-1},$$

из которой вытекает сходимость $x_k \to x^*$ при $k \to \infty$ и единственность решения x^*, удовлетворяющего условию $\|x^* - x_0\| \leqslant \delta$. Очевидно, что условие 5) теоремы 1 можно обеспечить за счет достаточно хорошего начального приближения x_0, т. е. за счет малости δ. Поэтому имеют значения способы, позволяющие ослабить условия на выбор начального приближения x_0. К таким методам относится метод параметризации задачи (1), или метод продолжения.

Рассмотрим семейство уравнений $H(x, t) = 0$, где

$$H(x, t) = F(x) + (t - 1) F(x^0), \quad t \in [0, 1]. \tag{8}$$

Воспользуемся следующей леммой [5].

Лемма. Пусть отображение $F: X \to Y$ (X, Y — банаховы пространства) непрерывно дифференцируемо в X и $\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant B$ для $\forall x \in X$. Тогда для $\forall x^0 \in X$ существует единственное непрерывно-дифференцируемое отображение $x(t): [0, 1] \to X$ такое, что для (8) выполняется условие

$$H(x(t), t) = 0 \text{ для любого } t \in [0, 1]. \tag{9}$$

Очевидно, что $x(1)$ является решением уравнения (1).

Возьмем равномерное разбиение $t_i = i/N$ отрезка $[0, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Комбинированный алгоритм метода Чебышева с методом параметризации имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}_k^i = x_k^i - \Gamma_k^i [F(x_k^i) + (t_i - 1) F(x^0)], \\ &x_{k+1}^i = \tilde{x}_k^i - \frac{1}{2}\Gamma_k^i F''(x_k^i)(\tilde{x}_k^i - x_k^i)^2, \\ &x_0^1 = x^0, \ x_0^{i+1} = x_{m_i}^i, \ k = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \ i = \overline{1, N-1}, \end{aligned}\right| \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}_k^N = x_k^N - \Gamma_k^N F(x_k^N), \\ &x_{k+1}^N = \tilde{x}_k^N - \frac{1}{2}\Gamma_k^N F''(x_k^N)(\tilde{x}_k^N - x_k^N)^2, \\ &x_0^N = x_{m_{N-1}}^{N-1}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right| \tag{11}$$

где $\Gamma_k^i = [F'(x_k^i)]^{-1}$.

Теорема 2. Пусть оператор $F: X \to Y$, $X = Y = R^n$, трижды непрерывно дифференцируем и существует константа B, что $\|[F'(x)\|^{-1}\| \leqslant B$.

Тогда для $\forall x^0 \in X$ существует такое целое $N_0 \geqslant 1$, что при $\forall N \geqslant N_0$ комбинированный процесс (10)—(11) сходится к единственному решению x^* уравнения (1), причем $m_i = m = 1$, $i = \overline{1,\ N-1}$.

Доказательство. Так как выполняются условия леммы, то оператор F является гомеоморфизмом, существует единственное решение x^* уравнения (1), которое можно единственным образом связать с x^0 непрерывно-дифференцируемой кривой $x(t)$, удовлетворяющей уравнению (9). Множество точек $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, образует в X компакт C. Выберем в X выпуклый компакт D такой, что $C \subset \operatorname{int} D$. Тогда

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant B, \quad \|F''(x)\| \leqslant M_1 < \infty,$$

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leqslant K\|x-y\|, \quad K < \infty \text{ для } \forall\, x, y \in D.$$

Образуем константу a, как в теореме 1, и выберем $\delta > 0$ таким, чтобы $h = a\delta \leqslant \frac{1}{2}$ и шар $S(x(t), \delta) \subset D$ для $\forall t \in [0,\ 1]$. Тогда для любого фиксированного $t \in [0,\ 1]$, если $x_0 \in S_t = S(x(t), \delta)$, то последовательность (3, 4) сходится к $x(t)$ и имеет место оценка

$$\| x_k - x(t) \| \leqslant \delta h^{3^k - 1}, \quad \| x_1 - x(t) \| \leqslant \frac{1}{4}\delta.$$

Покажем, что для $\forall N \geqslant N_0$, $N_0 \geqslant 2B\| F(x^0)\|\delta^{-1}$, $x_1^i \in S_{t_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots N-1$.

Действительно,

$$\| x_1^i - x(t_{i+1}) \| \leqslant \| x_1^i - x(t_i) \| + \| x(t_i) - x(t_{i+1}) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\delta + \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\, dt \right\| = \frac{1}{4}\delta + \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [F'(x(t))]^{-1} F(x^0)\, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\delta + B \cdot \| F(x^0) \| \cdot \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{2}\delta < \delta.$$

Наконец, получим

$$x_0^N = x_1^{N-1}, \quad \| x_1^{N-1} - x(t_N) \| = \| x_1^{N-1} - x^* \| < \delta.$$

По теореме 1 последовательность $\{x_k^N\}$ сходится к x^* при $k \to \infty$.

Список литературы

1. Мираков В. Е. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 5. С. 977.
2. Ульм С. // Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук. 1959. Вып. 8. № 4. С. 296.
3. Нечепуренко М. И. // УМН. 1954. Вып. 2. Т. 9. С. 163.
4. Черныщенко В. М. Теоремы о сходимости итерационных процессов высоких порядков. Днепропетровск, 1981. С. 17.
5. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975. С. 226.

Поступила в редакцию 11.01.90.

УДК 517.956.3

Л. Г. ТРЕТЬЯКОВА

К ЗАДАЧЕ ОБ ω-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу об ω-периодических решениях квазилинейного телеграфного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + cu = f(t, x, u), \tag{1}$$

удовлетворяющих дополнительным граничным условиям

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \tag{2}$$

где функция $f(t, x, u)$ является ω-периодической по переменной t.