Так как оптимум в задаче $\max\limits_{q\in \mathrm{vert}\, P_2} \pi A_q$ достигается в точке q^σ, где перестановка σ удовлетворяет условию (9) (см. [2]), то справедливость теоремы непосредственно следует из (10).

Все условия теоремы 1, за исключением (8_2), проверяются просто. Чтобы проверить условие (8_2), необходимо решить задачу о минимизации субмодулярной функции. Один из алгоритмов ее решения предложен в [4].

В заключение вернемся к нашему примеру. Чтобы найти оптимальные стратегии сельскохозяйственного предприятия, нужно решить следующую задачу:

$$\begin{gathered} v \to \max \\ v - 5p_1 - 3p_2 - p_3 \leqslant 0, \\ v - 7p_1 - 2p_2 - 3p_3 \leqslant 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где $P_1 = \left\{ p \in S_3 : \sum\limits_{i\in I} p_i \leqslant \mu\,(\bigcup\limits_{i\in I} F_i)/\mu\,(F), \right.$ $\mu\,(D)$ — площадь участка $D \subseteq F$. Решением задачи (11) будет точка $p^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right)$. Нетрудно убедиться, что предприятие может реализовать стратегию p^*, т. е. занять 2/5 площади под первую культуру, 3/10 — под вторую и 3/10 — под третью.

Список литературы

1. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М., 1981.
2. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987.
3. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971.
4. Писарук Н. Н.// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1989. № 9.

Поступила в редакцию 09.11.89.

УДК 532.516

М. М. ЧЕПИНОГА, А. Е. ЗЛЕБОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Постановка задачи. Математические модели различных волновых процессов обычно строятся с помощью уравнений Стокса. Краевые задачи, описываемые этими моделями, представляют собой довольно сложные системы дифференциальных уравнений при определенных граничных и начальных условиях и решаются приближенно [1, 2].

В настоящей статье предлагается модель, в основу которой положены обобщенные уравнения Рейнольдса [3], позволяющая исследовать распространение длинных волн в тонких слоях вязкой жидкости. Решены задачи: а) о плоских свободных волнах на поверхности раздела двух вязких жидкостей, ограниченных снизу и сверху бесконечными горизонтальными плоскостями; б) аналогичная задача, отличающаяся от первой наличием свободной поверхности вместо твердой крышки.

Обозначим через h_1, ρ_1, ν_1, h_2, ρ_2, ν_2 глубину, плотность и вязкость верхней и нижней жидкостей соответственно. Ось z направим вертикально вверх, а x расположим на невозмущенной поверхности раздела. Обобщенные уравнения Рейнольдса, описывающие движение жидкостей, получаются из уравнений Стокса путем разложения по малому параметру $\xi = H^2/\lambda^2$, $H = h_1 + h_2$, λ — длина волны. Для более общей задачи б) получим:

$$\frac{1}{h_1}\int\limits_0^{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dz = -g\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \nu_1\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{h_2}\int_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial t}dz=-\frac{\rho_1}{\rho_2}g\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}-\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}g\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial^2u_2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}+\int_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial x}dz=0,\quad \frac{\partial\zeta_1}{\partial t}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}+\int_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}dz=0,$$

где u_1, u_2 — горизонтальные составляющие скорости в верхней и нижней жидкостях соответственно; ζ_1, ζ_2 — профиль свободной поверхности и поверхности раздела; g — ускорение свободного падения. Вертикальные составляющие скорости $w_{1,2}\equiv 0$. Давление внутри жидкостей определяется по квазигидростатическому закону.

Система уравнений (1) решается с граничными условиями частичного скольжения на дне и поверхности раздела [4]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}=0 \text{ при } z=h_1;$$

$$\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z}=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z};\qquad \tau_1\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z}=u_1-u_2 \text{ при } z=0; \tag{2}$$

$$u_2=\tau\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z} \text{ при } z=-h_2,$$

где μ_1, μ_2 — динамические вязкости; τ, τ_1 — коэффициенты частичного скольжения на дне и поверхности раздела соответственно.

Задача а) ставится аналогично:

$$\frac{1}{h_1}\int_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}dz=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_0}{\partial x}-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\nu_1\frac{\partial^2u_1}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{h_2}\int_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial t}dz=-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_0}{\partial x}-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial^2u_2}{\partial z^2}, \tag{3}$$

$$\int_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}dz+\int_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial x}dz=0;\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=\int_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}dz.$$

$$\tau\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z}=-u_1 \text{ при } z=h_1,$$

$$\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z}=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z};\quad \tau_1\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z}=u_1-u_2 \text{ при } z=0, \tag{4}$$

$$\tau\mu_3\frac{\partial u_2}{\partial z}=u_2 \text{ при } z=-h_2,$$

где ζ — возвышение поверхности раздела; τ — коэффициент частичного скольжения на верхней и нижней твердых стенках; τ_1 — на поверхности раздела; $p_0(x,t)$ — неизвестное давление на поверхности раздела.

Внутренние волны (задача а). Интегрируя по z первые два уравнения системы (3) и используя граничные условия (4), получим телеграфное уравнение для профиля поверхности раздела:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+2b\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\varkappa\frac{d^2\zeta}{dx^2}=0, \tag{5}$$

причем $\varkappa=gh_1h_2(\rho_2-\rho_1)(\rho_1h_2+\rho_2h_1)^{-1}>0$; b — положительная константа, пропорциональная вязкости и выражающаяся через:

$$h_1,\ h_2,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \tau,\ \tau_1. \tag{6}$$

Решение уравнения (5) для свободных волн запишем:

$$\zeta=ae^{-bt}\cos\sigma t\cdot\cos kx,\quad \sigma=\sqrt{\varkappa k^2-b^2}. \tag{7}$$

Скорости и давление определяются по формулам:

$$\begin{aligned}&u_i=-ak^{-1}F_i(z)e^{-bt}(b\cos\sigma t+\sigma\sin\sigma t)\sin kx,\quad i=1,\ 2,\\&p_0=-a\rho_1k^{-2}h_1^{-1}e^{-bt}[bN_1+(\varkappa+gh_1)k^2)\cos\sigma t+\sigma N_1\sin\sigma t]\cos kx,\end{aligned} \tag{8}$$

где $F_i(z)$ — квадратичные функции от z; N_1 — постоянная величина, зависящая об параметров (6).

Можно рассмотреть прогрессивные волны:

$$\zeta = ae^{-bt}\cos(kx + \sigma t), \tag{9}$$

фазовая скорость которых:

$$c = \frac{\sigma}{k}\sqrt{\varkappa - \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2\lambda^2}. \tag{10}$$

Двухслойная жидкость со свободной поверхностью. Задача б) решается так же, как а). В результате получаем систему уравнений относительно $\zeta_{1,2}(x, t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} - U\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2} - M\frac{\partial\zeta_2}{\partial t} + R\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = 0,\\ &\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} - V\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2} - W\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x^2} + N\frac{\partial\zeta_2}{\partial t} - S\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $U = gh_1$; $V = g\rho_1\rho_2^{-1}h_2$; $W = (\rho_2 - \rho_1)\rho_2^{-1}gh_2$; M, R, N, S — положительные константы, выражающиеся через величины (6).

Для свободных волн решение ищем в виде:

$$\zeta_i = aT_i(t)\cos kx,\ i = 1, 2. \tag{12}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно $T_i(t)$ сведена к системе четырех ОДУ первого порядка, которая решена методом Эйлера. Общее решение:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= C_1e^{-b_1t}\cos\sigma_1t + C_2e^{-b_1t}\sin\sigma_1t + C_3e^{-b_2t}\cos\sigma_2t + C_4e^{-b_2t}\sin\sigma_2t,\\ T_2(t) &= C_1\delta_1e^{-b_1t}\cos(\sigma_1t + \varphi_1) + C_2\delta_1e^{-b_1t}\sin(\sigma_1t + \varphi_1) +\\ &+ C_3\delta_2e^{-b_2t}\cos(\sigma_2t + \varphi_2) + C_4\delta_2e^{-b_2t}\sin(\sigma_2t + \varphi_1), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\beta = -b \pm i\sigma$ — корень уравнения четвертой степени:

$$\begin{gathered} \beta^4 + a_1\beta^3 + (a_2k + a_3)\beta^2 + a_4k^2\beta + a_5k^4 = 0,\\ a_1 = R + N - S > 0;\ a_2 = U + V + W;\ a_3 = NR - MS > 0;\\ a_4 = NU + RW + MV;\ a_5 = UW. \end{gathered} \tag{14}$$

Для каждой пары (b, σ) величины δ и φ вычисляются следующим образом:

$$\begin{gathered} \delta = \sqrt{\delta_R^2 + \delta_I^2};\ \cos\varphi = \delta_R/\delta;\ \sin\varphi = \delta_I/\delta,\\ \delta_R = \operatorname{Re}\Delta^*,\ \delta_I = \operatorname{Im}\Delta^*;\\ \Delta^* = \frac{-Sb - Vk^2 + i\sigma S}{Wk^2 - Nb + b^2 - \sigma^2 + i\sigma(N - 2)},\ i = \sqrt{-1}. \end{gathered} \tag{16}$$

Анализ решения. Скорость затухания волнового процесса определяется коэффициентом b, который выражается через величины (6). В табл. 1 приводятся данные, характеризующие зависимость декремента затухания b от параметров жидкостей для трех различных случаев: 1 — $\nu_1 = 2\cdot10^{-2}$, $\rho_1 = 900$, $\nu_2 = 2\cdot10^{-6}$, $\rho_2 = 1000$; 2 — $\nu_1 = 2\cdot10^{-6}$, $\rho_1 = 800$, $\nu_2 = 2\cdot10^{-2}$, $\rho_2 = 1000$; 3 — $\nu_1 = 2\cdot10^{-6}$, $\rho_1 = 800$, $\nu_2 = 2\cdot10^{-2}$, $\rho^2 = 900$, $h_1 + h_2 = 1$. Здесь и далее размерность дается в системе СИ: $[\mu] = $ кг $\cdot$ м$^{-1}\cdot$ с$^{-1}$; $[\rho] =$ кг $\cdot$ м$^{-3}$; $[\nu] =$ м$^2\cdot$ с$^{-1}$; $[h] =$ м; $[\tau] =$ м$^2\cdot$ с $\cdot$ кг$^{-1}$; $[b] =$ с$^{-1}$ и для краткости записи опускается. Зависимость декремента затухания от коэффициентов частичного скольжения τ, τ_1 на примере двух жидкостей с параметрами: $\nu_1 = 0{,}02$, $\rho_1 = 900$, $h_1 = 0{,}2$, $\nu_2 = 2\cdot10^{-6}$, $\rho_2 = 1000$, $h_2 = 0{,}8$ дана в табл. 2.

Для двухслойной жидкости со свободной поверхностью декремент затухания зависит от длины волны λ или волнового числа k. В табл. 3 приводится зависимость декрементов затухания b_1, b_2 от волнового числа k для жидкости с параметрами: $\nu_1 = 2\cdot10^{-2}$, $\rho_1 = 800$, $\nu_2 = 2\cdot10^{-6}$, $\rho_2 = 1000$; $h_1 = 0{,}2$, $h_2 = 0{,}8$ и $h_1 = 2$, $h_2 = 8$; b_1, b_2 — модули действитель-

Таблица 1

Зависимость декремента затухания от параметров жидкостей

№№ пп	h_1/h_2		
	1/9	1	9
1	2,67	$5{,}6\cdot10^{-2}$	$4{,}65\cdot10^{-3}$
2	$5{,}75\cdot10^{-3}$	$6{,}67\cdot10^{-2}$	2,75
3	$5{,}37\cdot10^{-3}$	$6{,}36\cdot10^{-2}$	2,73

Таблица 2

Зависимость декремента затухания от коэффициентов частичного скольжения

τ_1, $м^2\cdot с\cdot кг^{-1}$	τ, $м^2\cdot с\cdot кг^{-1}$		
	0	100	∞
0		$5{,}55\cdot10^{-5}$	$2{,}55\cdot10^{-5}$
100	$5{,}87\cdot10^{-1}$	$4{,}00\cdot10^{-5}$	$1{,}45\cdot10^{-5}$
∞		$2{,}23\cdot10^{-5}$	0

Таблица 3

Зависимость декрементов затухания от волнового числа

k, $м^{-1}$	$h_1=0{,}2$ м; $h_2=0{,}8$ м		$h_1=2$ м; $h_2=8$ м	
	b_1, $с^{-1}$	b_2, $с^{-1}$	b_1, $с^{-1}$	b_2, $с^{-1}$
10^{-1}	$4{,}51\cdot10^{-5}$	$9{,}10\cdot10^{-3}$		
10^{-2}	$4{,}51\cdot10^{-5}$	—	$4{,}508\cdot10^{-7}$	$8{,}96\cdot10^{-5}$
10^{-3}	$4{,}51\cdot10^{-5}$	—	$4{,}508\cdot10^{-7}$	$8{,}97\cdot10^{-5}$
10^{-4}	$4{,}51\cdot10^{-5}$	—	$4{,}508\cdot10^{-7}$	$1{,}06\cdot10^{-4}$
10^{-5}	—	—	$4{,}508\cdot10^{-7}$	—
10^{-6}	—	—	$4{,}509\cdot10^{-7}$	—
10^{-7}	—	—	—	—

ных частей двух различных корней уравнения (14), т. е. в отличие от задачи а) одна и та же волна, характеризуемая длиной λ, может затухать по-разному в зависимости от начальных условий — либо с декрементом b_1, либо с b_2.

Длина волны ограничена снизу и сверху: $\lambda_1 \leqslant \lambda < \lambda_0$. Нижний предел — следствие того, что волны длинные ($\lambda \gg H$), верхний — что ζ — решение телеграфного уравнения $\left(k=\frac{2\pi}{\lambda}>\frac{b}{\sqrt{x}}\right)$. Для двухслойной жидкости со свободной поверхностью верхний предел может быть найден только численно (см. табл. 3). Для реальных жидкостей λ_0 составляет несколько десятков км (идеальные жидкости верхнего предела не имеют).

Решение задачи с условиями частичного скольжения является наиболее общим, так как при $\tau=\tau_1=0$ имеем случай полного прилипания, а при $\tau\to\infty$, $\tau_1\to\infty$, $\mu_1=\mu_2=0$ получаем решение, соответствующее идеальным жидкостям. Расчеты на ЭВМ показали, что

$$\tau,\ \tau_1 < 10^{-6}-10^{-4} \Leftrightarrow \tau,\ \tau_1=0,$$
$$\tau,\ \tau_1 > 10^{4}-10^{6} \Leftrightarrow \tau,\ \tau_1=\infty.$$

Решениями задачи б) могут быть как поверхностные, так и внутренние волны. Действительно, уравнение (14) имеет два комплексно-сопряженных корня: $-b_1 \pm i\sigma_1$, $-b_2 \pm i\sigma_2$; пусть, например, $0 < \delta_1 < 1$, $\delta_2 > 1$ (см. (15)). Тогда первая волна, характеризуемая параметрами b_1, σ_1, будет поверхностной: поверхности ζ_1, ζ_2 колеблются в одной фазе, причем амплитуда колебания поверхности раздела меньше амплитуды колебания свободной поверхности $a\delta_1 < a$. Волна с параметрами b_2, σ_2 — внутренняя: ζ_1, ζ_2 колеблются в противофазе и $a\delta_2 > a$.

Список литературы

1. Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны. Киев, 1970.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, 1976.
3. Слезкин Н. А. Динамика низкой несжимаемой жидкости. М., 1955.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л., 1947.

Поступила в редакцию 23.11.89.

УДК 519.6

В. А. ДРАГУН, Н. П. ФЕДЕНКО

О МЕТОДЕ ЧЕБЫШЕВА

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F : D \subset X \to Y$, X и Y — банаховы пространства. Для решения уравнения (1) применим метод Чебышева, по которому для заданного начального приближения x_0 последующие приближения определяются по формуле

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1}\left[F(x_k) + \frac{1}{2}F''(x_k)(-(F'(x_k))^{-1}F(x_k))^2\right], \tag{2}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Среди работ по исследованию метода Чебышева в случае функциональных пространств отметим работы [1—4]. В данной статье приведены достаточные условия сходимости метода Чебышева и оценка погрешности, а с помощью параметризации задачи (1) ослаблены условия на выбор начального приближения x_0.

В дальнейшем x_{k+1} будем определять по формулам

$$x_{k+1} = \tilde{x}_k - \frac{1}{2}\Gamma_k F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2, \tag{3}$$

где

$$\tilde{x}_k = x_k - \Gamma_k F(x_k),\ \Gamma_k = [F'(x_k)]^{-1},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть оператор F определен в шаре $S = \{x : \|x - x_0\| \leqslant 2\delta\}$ банахова пространства X, действует в банахово пространство Y и удовлетворяет условиям:

1) существует решение x^* уравнения (1) такое, что $\|x^* - x_0\| \leqslant \delta$;
2) для любого $x \in S$ существует $\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}$ и $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$;
3) $\|F''(x_0)\| \leqslant M$;
4) $\|F''(x) - F''(y)\| \leqslant K\|x - y\|$ для любых x и $y \in S$;
5) $h = \delta a < 1$, где $a = \sqrt{\frac{1}{2}BK + \frac{1}{8}B^3M_1^3\delta + \frac{1}{2}B^2M_1^2}$, $M_1 = 2K\delta + M$.

Тогда последовательность $\{x_k\}$, образованная по (3), (4), начиная с x_0, содержится в S, сходится к x^* и имеет место оценка

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \delta h^{3^k - 1}. \tag{5}$$

Доказательство. Применим метод индукции. Предположим, что $x_k \in S$, $k > 1$, и покажем, что $x_{k+1} \in S$. То, что $x_1 \in S$, доказывается