

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Тышкевич Р. И., Черняк А. А., Черняк Ж. А. // Кибернетика. 1987. № 6. С. 12; 1988. № 2. С. 1.
3. Зверович В. Э., Зверович И. Э., Сплла А. Несколько результатов о вынужденно n -раскрашиваемых и вынужденно i -циклических последовательностях. Минск, 1988. Деп. в ВИНТИ 12.04.88. № 2790-388.
4. Зверович И. Э. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 55.
5. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 2. С. 5.

Поступила в редакцию 15.03.89.

УДК 519.832.3

Н. Н. ПИСАРУК, В. С. РЕДДИ (ИНДИЯ)

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ С ЗАВИСИМЫМИ СТРАТЕГИЯМИ

Рассмотрим матричную игру размера $m \times n$ с матрицей A выигрышей первого игрока. Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ и $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множества стратегий первого и второго игроков соответственно. Смешанные стратегии $p \in S_m$ и $q \in S_n$ есть наборы вероятностей применения игроками их чистых стратегий. Здесь $S_k = \left\{ x \in R^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, k \right\}$ — симплекс. В классической постановке решением матричной игры в смешанных стратегиях является пара стратегий p^0, q^0 , которые образуют седловую точку функции

$$M(p, q) = pAq = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij} \quad (1)$$

среднего выигрыша (математического ожидания) первого игрока, т. е.

$$M(p, q^0) \leq M(p^0, q^0) \leq M(p^0, q) \quad \forall p \in S_m, q \in S_n. \quad (2)$$

Условия $p \in S_m$ и $q \in S_n$ фактически означают, что стратегии не зависят между собой. На практике встречаются задачи, для которых данное условие не выполняется. Проиллюстрируем это на примере задачи о планировании посева [1].

Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать три культуры на участке $F = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 4\}$. Матрица доходов предприятия с единицы площади посевов в зависимости от состояний погоды имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если в качестве модели задачи выбора оптимальной стратегии планирования посевов рассматривать матричную игру, то его оптимальной стратегией будет $p^0 = (2/3, 1/3, 0)$. Таким образом, сельскохозяйственному предприятию рекомендуется $2/3$ площади посевов занять под первую культуру и $1/3$ — под вторую, т. е. первую культуру можно сеять только на $2/5$ всей площади, а суммарная площадь, отведенная под первую и вторую культуры, не превосходит 14. Однако возможны дополнительные ограничения типа: первую культуру можно сеять на участке $F_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4\}$, вторую — на $F_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 2\}$ и третью — на $F_3 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 1 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 4\}$. В таком случае математическая модель задачи в виде матричной игры не описывает реальную ситуацию.

Рассмотрим игровую модель, которая позволит устранить указанный недостаток. А именно, построим модель смешанного расширения матричной игры с ограничениями на выбор стратегий. Предположим, что заданы функции

$$\rho_1 : 2^M \rightarrow R_+ \text{ и } \rho_2 : 2^N \rightarrow R_+,$$

где ρ_k — верхняя граница вероятности применения k -м игроком стратегий из множества I , $k = 1, 2$. Как показано в [2], функции ρ_1 и ρ_2 как функции меры субмодулярны. Напомним, что функция $\rho : 2^M \rightarrow R_+$ называется субмодулярной, если выполняется следующее условие:

$$\rho(I) + \rho(J) \geq \rho(I \cup J) + \rho(I \cap J) \quad \forall I, J \in 2^M.$$

В задаче планирования посева

$$\rho_1(I) = \mu \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) \setminus \mu(F),$$

$$\rho_2(I) = \begin{cases} 0, & I = \emptyset \\ 1, & I \neq \emptyset, \end{cases}$$

где μ — функция меры, например, площадь.

Функциям ρ_1 и ρ_2 соответствуют базовые многогранники

$$P_1 = \left\{ x \in S_m : \sum_{i \in I} x_i \leq \rho_1(I), \quad I \in 2^M \right\},$$

$$P_2 = \left\{ x \in S_n : \sum_{i \in I} x_i \leq \rho_2(I), \quad I \in 2^M \right\}.$$

Стратегии $p \in P_1$, $q \in P_2$ будем называть допустимыми. В качестве решения матричной игры рассмотрим пару допустимых стратегий p^0 , q^0 , которые образуют седловую точку функции $M(p, q)$, т. е.

$$M(p, q^0) \leq M(p^0, q^0) \leq M(p^0, q) \quad \forall p \in P_1, q \in P_2. \quad (3)$$

В соответствии с принципом гарантированного результата, принятого в теории игр, функции выигрышей первого игрока $f(p)$ и проигрышей второго $g(q)$ определяются следующим образом:

$$f(p) = \min_{q \in P_2} M(p, q) = \min_{q \in \text{vert } P_2} M(p, q),$$

$$g(q) = \max_{p \in P_1} M(p, q) = \max_{p \in \text{vert } P_1} M(p, q).$$

Отметим, что $g(q)$ — выпуклая, а $f(p)$ — вогнутая функции. Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш:

$$\max_{p \in P_1} f(p), \quad (4)$$

а второй — минимизировать свой проигрыш:

$$\min_{q \in P_2} g(q). \quad (5)$$

В силу теоремы о совпадении $\min \max$ и $\max \min$ (см. [3]), точки p^0 и q^0 оптимума в задачах (4), (5) будут удовлетворять условию (3), а следовательно, являются решением матричной игры в допустимых смешанных стратегиях.

Покажем теперь, как можно решить задачу (4). Задача (5) решается аналогично с учетом того, что матрица выигрышей второго игрока $-A^T$. Так как $f(p)$ — кусочно-линейная вогнутая функция, то (4) эквивалентна задаче линейного программирования

$$v \rightarrow \max$$

$$v - p(Aq) \leq 0 \quad \forall q \in \text{vert } P_2,$$

$$\sum_{i \in I} p_i \leq \rho_1(I) \quad \forall I \in 2^M, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1,$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p, v) с максимальной координатой v . Запишем двойственную задачу к задаче (6):

$$\begin{aligned} \sum_{I \in 2^M} \rho_1(I) z_I &\rightarrow \min, \\ \sum_{I \in 2^M, i \in I} z_I - \sum_{q \in \text{vert } P_2} (A_i q) y_q - s_i &= \theta, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{q \in \text{vert } P_2} y_q &= 1, \\ y_q &\geq 0 \quad \forall q \in \text{vert } P_2, \\ z_I &\geq 0 \quad \forall I \in 2^M \setminus M \\ s_i &\geq \theta \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6D)$$

Для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_n$ через $q^\sigma \in P_2$ будем обозначать вектор с координатами

$$q_{\sigma_i}^\sigma = \rho_2(\sigma)[i] - \rho_2(\sigma[i-1]), \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где $\sigma[i] = \{\sigma_i, \dots, \sigma_n\}$, $i = 1, \dots, n$, $\sigma[0] = \emptyset$.

Теорема 1. Базисное допустимое решение (z, y, s) задачи (6D) является оптимальным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\pi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8_1)$$

$$\min \left(\rho_1(I) - \sum_{i \in I} \pi_i \right) \geq 0, \quad (8_2)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = \rho_1(N), \quad (8_3)$$

$$\pi A_q^B \geq \pi_{n+1}, \quad (8_4)$$

где $\pi = (\pi, \pi_{n+1}) = B^{-1}C_B$ — вектор потенциалов; B и C_B — базисная матрица и вектор целевой функции, соответствующие решению (z, y, s) . Здесь перестановка $\sigma \in S_n$ удовлетворяет условию

$$(\pi A)_{\sigma_1} \leq (\pi A)_{\sigma_2} \leq \dots \leq (\pi A)_{\sigma_n}. \quad (9)$$

Доказательство. Столбцы матрицы ограничений задачи (6D) имеют один из следующих трех типов:

$$1) \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad 2) \begin{pmatrix} -A_q^I \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -e_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

где χ^I — характеристический вектор множества $I \in 2^N$ имеет координаты $(\chi^I)_i = 1$, если $i \in I$ и $\chi^I_i = 0$, если $i \notin I$, e_i — i -й единичный орт в R^n . В принятых обозначениях условие оптимальной задачи линейного программирования (6D) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(I) - \pi \chi^I &\geq 0, \quad \forall I \in 2^N \setminus N, \\ \rho(I) - \pi \chi^N &= 0, \\ \pi A_q - \pi_{n+1} &\geq 0 \quad \forall q \in \text{vert } P_2, \\ \pi &\geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как оптимум в задаче $\max_{q \in \text{vert } P_2} \pi A_q$ достигается в точке q^σ , где перестановка σ удовлетворяет условию (9) (см. [2]), то справедливость теоремы непосредственно следует из (10).

Все условия теоремы 1, за исключением (8_2) , проверяются просто. Чтобы проверить условие (8_2) , необходимо решить задачу о минимизации субмодулярной функции. Один из алгоритмов ее решения предложен в [4].

В заключение вернемся к нашему примеру. Чтобы найти оптимальные стратегии сельскохозяйственного предприятия, нужно решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow \max \\ v - 5p_1 - 3p_2 - p_3 &\leq 0, \\ v - 7p_1 - 2p_2 - 3p_3 &\leq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $P_1 = \left\{ p \in S_3 : \sum_{i \in I} p_i \leq \mu \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) / \mu(F), \mu(D) \right.$ — площадь участка $D \subseteq F$.

Решением задачи (11) будет точка $p^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10} \right)$. Нетрудно убедиться, что предприятие может реализовать стратегию p^* , т. е. занять $2/5$ площади под первую культуру, $3/10$ — под вторую и $3/10$ — под третью.

Список литературы

1. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М., 1981.
2. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987.
3. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971.
4. Писарук Н. Н. // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1989. № 9.

Поступила в редакцию 09.11.89.

УДК 532.516

М. М. ЧЕПИНОГА, А. Е. ЗЛЕБОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Постановка задачи. Математические модели различных волновых процессов обычно строятся с помощью уравнений Стокса. Краевые задачи, описываемые этими моделями, представляют собой довольно сложные системы дифференциальных уравнений при определенных граничных и начальных условиях и решаются приближенно [1, 2].

В настоящей статье предлагается модель, в основу которой положены обобщенные уравнения Рейнольдса [3], позволяющая исследовать распространение длинных волн в тонких слоях вязкой жидкости. Решены задачи: а) о плоских свободных волнах на поверхности раздела двух вязких жидкостей, ограниченных снизу и сверху бесконечными горизонтальными плоскостями; б) аналогичная задача, отличающаяся от первой наличием свободной поверхности вместо твердой крышки.

Обозначим через $h_1, \rho_1, \nu_1, h_2, \rho_2, \nu_2$ глубину, плотность и вязкость верхней и нижней жидкостей соответственно. Ось z направим вертикально вверх, а x расположим на невозмущенной поверхности раздела. Обобщенные уравнения Рейнольдса, описывающие движение жидкостей, получаются из уравнений Стокса путем разложения по малому параметру $\xi = H^2/\lambda^2$, $H = h_1 + h_2$, λ — длина волны. Для более общей задачи б) получим:

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} dz = -g \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},$$