склеивания листов. Применяя к $\tilde{\mathbf{R}}$ результаты предыдущего пункта, заключаем, что существует рациональная функция $z=\varphi(\zeta)$, реализующая конформный гомеоморфизм плоскости $\hat{\mathbf{C}}_\zeta$ на поверхность $\tilde{\mathbf{R}}$ (и некоторой $2\rho$-связной плоской области на разрезанную поверхность $\mathbf{R}$). Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 2.** *Для любого алгебраического соответствия (1) существует глобальная униформизация (2), такая, что хотя бы одна из функций $\varphi$ или $\psi$ — рациональная.*

Существование такой униформизации принципиально важно с точки зрения ее фактического нахождения.

## Список литературы

1. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 234.
2. Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. М., 1969.
3. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.; Л., 1936.
4. Джураев О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. № 3. С. 53.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973. С. 175.

Поступила в редакцию 02.07.90.

*УДК 519.1*

*М. М. КОВАЛЕВ, А. Л. ТОПЧИШВИЛИ*

# НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Теория несобственных задач линейного и выпуклого программирования разработана в 70—80-е годы [1]. Практика применения дискретных моделей требует создания аналогичной теории несобственных задач дискретной оптимизации. Способы анализа противоречивых моделей выпуклого программирования связаны с разными методами аппроксимации несовместных систем выпуклых ограничений. В статье предлагается метод аппроксимации систем выпуклых диофантовых неравенств совместными системами, основанный на доказанном свойстве порядковой выпуклости функции невязки. Тем самым будет построен один из способов анализа несобственных задач выпуклой дискретной оптимизации.

Пусть $Z^n$—решетка целочисленных векторов, $Z^n_+$—подрешетка векторов с неотрицательными координатами. Пусть $a_i : Z^n_+ \to R$ — порядково-выпуклые неубывающие для $i = 1, \ldots, m$ и невозрастающие для $i = m+1, \ldots, m+k$ функции. Напомним, что функция $f : Z^n \to R$ называется порядково-выпуклой, если ее $(i, j)$ — градиенты $\nabla_{ij} f(x)$, определяемые правилом $\nabla_{ij} f(x) = f(x+e_i+e_j) - f(x+e_i) - f(x+e_j) + f(x)$, не имеют отрицательных значений для всех $x$ и $i$, $j$.

Рассмотрим систему диофантовых неравенств: $x \in Z^n_+$,

$$a_i(x) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, m + k. \qquad (1)$$

В частном случае функции $a_i$ могут быть линейными:

$$a'_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j - b'_i, \; i = 1, \ldots, m,$$

$$a''_i(x) = b''_i - \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j, \; i = m + 1, \ldots, m + k$$

(все $a'_{ij}$, $a''_{ij}$ — неотрицательны), т. е. речь идет о коррекции следующей системы линейных диофантовых неравенств: $x \in Z^n_+$,

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \leqslant b'_i, \ i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j \geqslant b''_i, \ i = m+1, \dots, m+k. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию невязки $i$-го ограничения $a_i^+(x) = \max\{0, a_i(x)\}$. Тогда величину $g(x) = \sum_{i=1}^{m+k} a_i^+(x)$ назовем невязкой системы (1) в точке $x$, а функцию $g: Z^n \to R_+$ — функцией невязки. Меру несовместимости $\xi$ системы (1) введем правилом

$$\xi = \min_{x \in Z_+^n} g(x). \tag{4}$$

**Лемма 1.** Система (1) совместна тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Пусть $x^*$ — оптимальное решение задачи (4). Тогда переход от несовместной системы (1) к совместной системе

$$a_i(x) \leqslant a_i^+(x^*), \ i = 1, \dots, m+k$$

назовем $l_1$-аппроксимацией системы (1); $l_1$-аппроксимацией несовместной линейной системы (2)—(3) будет следующая совместная система

$$A'x \leqslant b' + \Delta b', \ A''x \geqslant b'' - \Delta b'', \tag{5}$$

где компоненты векторов возмущений $\Delta b'$ и $\Delta b''$ определяются правилом

$$\Delta b' = \max\left\{0, \ \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j^* - b'_i\right\},$$

$$\Delta b'' = \min\left\{0, \ \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j^* - b''_i\right\},$$

$l_1$-аппроксимация соответствует коррекции системы (1) путем минимального в метрике $\|\cdot\|_{l_1}$ возмущения правой части. Возможны аппроксимации с минимизацией возмущений по другим нормам в $R^{m+k}$. Если $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $R^{m+k}$, то тогда функция невязки системы определяется правилом $g(x) = \|a_1^+(x), \dots, a_{m+k}^+(x)\|$. Выбор нормы определяется как содержательным смыслом задачи, так и требованием эффективной разрешимости задачи оптимизации (4). В непрерывном случае последнее требование несущественно, так как выпуклость функций $a_i(x)$ влечет, как правило, выпуклость функции невязки $g(x)$.

Докажем, что в принятой нами модели порядковой выпуклости при $l_1$-аппроксимации функция невязки является также порядково-выпуклой.

**Теорема 1.** Если $a(x)$ — неубывающая (невозрастающая) порядково-выпуклая функция, то функция $a^+(x) = \max\{0, a(x)\}$ также порядково-выпуклая.

Схема доказательства. Пусть $a(x)$ — неубывающая функция (доказательство для невозрастающей функции полностью аналогично). Необходимо доказать, что $\nabla_{ij} a^+(x) \geqslant 0$, или что то же

$$a^+(x + e_i + e_j) - a^+(x + e_i) \geqslant a^+(x + e_j) - a^+(x). \tag{6}$$

В силу порядковой выпуклости функции $a(x)$ справедливо

$$a(x + e_i + e_j) - a(x + e_i) \geqslant a(x + e_j) - a(x). \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1) $a(x) > 0$. В силу монотонности функции $a(x)$ неравенство (6) в этом случае эквивалентно неравенству (7).

2) $a(x + e_i + e_j) \leqslant 0$. В силу монотонности функции $a(x)$ справедливо $a^+(x + e_i + e_j) = a^+(x + e_i) = a^+(x + e_j) = a^+(x) = 0$ и, следовательно, неравенство (6) в этом случае справедливо.

3) $a(x+e_i+e_j)>0$, $a(x+e_i)>0$, $a(x+e_j)>0$, $a(x)\leqslant 0$. Неравенство (7) можно заменить на $a(x+e_i+e_j)-a(x+e_i)\geqslant a(x+e_j)$, которое при сделанных предположениях влечет (6).

4) $a(x+e_i+e_j)>0$, $a(x+e_j)>0$, $a(x+e_i)\leqslant 0$, $a(x)\leqslant 0$. В силу монотонности функции $a(x)$ имеем $a(x+e_i+e_j)\geqslant a(x+e_j)$. Откуда с учетом, что $a^+(x+e_i)=0$, $a^+(x)=0$, имеем (6).

**Лемма 2.** Сумма порядково-выпуклых функций — функция порядково-выпуклая.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

**Теорема 2.** Функция $g(x)$ невязки системы (1) порядково-выпуклая.

Точку $x\in Z^n$, обладающую свойством $g(x)=0$, назовем нулем функции $g(x)$.

*Следствие 1.* В случае совместимости системы (1) в $Z^n$ множество ее решений совпадает с множеством нулей порядково-выпуклой функции.

Теорема 2 указывает простой метод построения совместной аппроксимации системы неравенств (1), близкой к $l_1$-аппроксимации. Пусть $x^g$ — градиентное решение задачи (4), построенное алгоритмом координатного спуска. Известно [3], что $x^g$ является хорошим приближением для точки $x^*$ минимума функции невязки (в случае, если порядково-выпуклая функция $g$ является сепарабельной $x^g=x^*$).

Пример. Рассмотрим систему линейных диофантовых неравенств $0\leqslant x_1\leqslant 6$, $1\leqslant x_2\leqslant 2$, $x_1+4x_2\leqslant 10$, $32\leqslant 3x_1+8x_2$. Функция невязки имеет вид $g(x_1,x_2)=\max\{0,\ x_1-6\}+\max\{0,\ x_2-2\}+\max\{0,\ x_1+4x_2-10\}+\max\{0,\ -x\}+\max\{0,\ 1-x_2\}+\max\{0,\ 32-3x_1-8x_2\}$. Алгоритм координатного спуска дает точку $x^g=(0,4)$, $g(x^g)=8$. Строим вектора возмущений $\Delta b'=(0,2,6)$, $\Delta b''=(0,0,0)$. Совместная система имеет вид $0\leqslant x_1\leqslant 6$, $1\leqslant x_2\leqslant 4$, $x_1+4x_2\leqslant 16$, $32\leqslant 3x_1+8x_2$.

Минимум функции невязки равен 4 и достигается в нескольких точках, например в точках $x_1^*=(8,1)$, $x_2^*=(6,2)$, $x_3^*=(5,2)$. Соответствующие им вектора возмущений для построения $l_1$-аппроксимации имеют вид: $\Delta b_1'=(8,0,2)$, $\Delta b_1''=(0,0,0)$, $\Delta b_2'=(0,0,4)$, $\Delta b_2''=(0,0,0)$, $\Delta b_3'=(0,0,3)$, $\Delta b_3''=(0,0,1)$.

### Список литературы


1. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. М., 1979.
2. Еремин И. М., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М., 1983.
3. Ковалев М. М. Кибернетика. 1985. № 6. С. 77.


Поступила в редакцию 25.02.88.

*УДК 519.1*

*И. Э. ЗВЕРОВИЧ, А. СИЛЛА (ГВИНЕЯ)*

## *P*-УНИГРАФИЧНОСТЬ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

Мы используем терминологию [1] за исключением терминологии, относящейся к степенным последовательностям [2]. Последовательность целых чисел

$$\pi=(d_1,d_2,\ldots,d_p),\ \text{где } d_1\geqslant d_2\geqslant\ldots\geqslant d_p>0, \qquad (1)$$

называется графической, если существует граф $G$ с множеством вершин $VG=\{v_1\ldots v_p\}$. Степень вершины $v_i$ равна $d_i$: $\deg v_i=\deg v_i=d_i$, $i=\overline{1,p}$. В этом случае $G$ называется реализацией последовательности $\pi$. Обозначим через $I(\pi)$ соответственно $I_P(\pi)$ множество всех реализаций последовательности $\pi$ (обладающих свойством $P$). Последовательность $\pi$ называется вынужденно $P$-графической (соответственно $P$-униграфической), если $\varnothing\neq I(\pi)\subseteq I_P$ (соответственно $/I(\pi)\cap I_P/=1$), где $I_P$ обо-