УДК 517.948.32 : 517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

О ВОЗМОЖНОСТИ ЯВНОГО ПОСТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ УНИФОРМИЗАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СООТВЕТСТВИЯ

1. Пусть F — неприводимый многочлен от двух комплексных переменных z и w над полем $\mathbf{C}$.

Уравнение

$$F(z, w) = 0 \tag{1}$$

задает (вообще говоря, многозначное) алгебраическое соответствие между переменными z и w.

Под *униформизацией* этого соответствия понимается нахождение пары однозначных аналитических функций

$$\begin{cases} z = \varphi(\zeta), \\ w = \psi(\zeta), \end{cases} \tag{2}$$

таких, что выполняется тождество $F[\varphi(\zeta), \psi(\zeta)] \equiv 0$. Униформизация называется *локальной*, если функции (2) удовлетворяют уравнению (1) в некоторой окрестности наперед заданной точки (z_0, w_0), где $F(z_0, w_0) = 0$. Достаточно полное и алгоритмичное решение проблемы нахождения локальной униформизации содержится в многочисленных известных теоремах о неявных функциях. Построить униформизацию можно, например, методом диаграммы Ньютона [1]. *Униформизация называется глобальной, если функции (2) удовлетворяют уравнению (1) для всевозможных значений переменных z и w, связанных этим уравнением.* Проблема существования глобальной униформизации (или 22-я проблема Гильберта [2]) полностью решена в ряде классических работ, выполненных на рубеже веков. Однако в общем случае никаких способов явного построения глобальной униформизации эти работы не содержат, поскольку в них используется общая теорема Б. Римана о существовании конформного гомеоморфизма односвязной римановой поверхности на каноническую область. Такие способы есть только в некоторых частных случаях (униформизация рациональными, периодическими, двоякопериодическими и некоторыми другими классами функций). Вообще, в работах по теории униформизации прослеживается тенденция искать униформизирующие функции в тех или иных классах автоморфных функций [3], что тоже сужает возможности их явного построения. Поэтому оставим только самые существенные ограничения, каковыми являются требования однозначности и аналитичности функций (2). Тогда общая схема построения униформизации может быть описана следующим образом. Если риманова поверхность $\mathbf{R}$, заданная уравнением (1), не подобна однолистным, то на ней проводим разрезы L с таким расчетом, чтобы разрезанная поверхность стала подобной однолистным, т. е. конформно эквивалентной какой-либо однолистной области $D \subset \hat{\mathbf{C}}$. Тогда искомая глобальная униформизация выражается в явном виде через конформный гомеоморфизм f: $\mathbf{R}\setminus L\to D$ следующим образом:

$$\begin{cases} z = (\pi_1\circ f^{-1})(\zeta), \\ w = (\pi_2\circ f^{-1})(\zeta), \end{cases} \quad \zeta\in D,$$

где $(z, w)\in \mathbf{R}$, а $\pi_1 : (z, w)\to z$ и $\pi_2 : (z, w)\to w$ — отображения проектирования. Успех явного построения униформизации (3) зависит, вообще говоря, от удачного подбора разрезов L, области D и отображающей функции f.

2. В случае, когда риманова поверхность $\mathbf{R}$, заданная уравнением (1), рода нуль (т. е. гомеоморфна расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbf{C}}$), глобальная униформизация соответствия (1) известна и реализуется с помощью рациональных функций φ и ψ. Способы построения униформизации дает теория алгебраических функций [1]. В основе этих способов лежит существование рациональной функции $\zeta=r(z, w)$, имеющей на $\mathbf{R}$ единственный простой полюс.

Предположим теперь, что род римановой поверхности $\mathbf{R}$ равен нулю, *но ее алгебраическое уравнение (1) не задано*. Вместо этого пусть известно, что поверхность $\mathbf{R}$ задана как n-листное накрытие плоскости $\widehat{\mathbf{C}}$, и пусть заданы проекции всех ее точек ветвления. Точнее говоря, пусть заданы точки $a_1, \ldots, a_k\in\mathbf{C}$ и подстановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ длины n. Считается, что при обходе против часовой стрелки вокруг каждой точки a_ν листы накрытия $\mathbf{R}$ переходят друг в друга по закону соответствующей подстановки σ_ν. К числу точек ветвления отнесем также точку ∞, при обходе вокруг нее листы должны переходить друг в друга по закону подстановки $\sigma_\infty = \sigma_1^{-1}\circ\ldots\circ\sigma_k^{-1}$. Для наших целей важно уметь находить функцию w, реализующую конформный гомеоморфизм римановой поверхности $\mathbf{R}$ на плоскость $\widehat{\mathbf{C}}$. Такая функция должна удовлетворять неприводимому алгебраическому уравнению степени n по w и степени 1 по z

$$(\alpha_0+\beta_0 z)\,w^n + (\alpha_1+\beta_1 z)\,w^{n-1} + \ldots + (\alpha_n+\beta_n z) = 0 \qquad (3)$$

с неопределенными коэффициентами α_μ, β_μ. Эти коэффициенты следует находить из системы уравнений, выражающей заданный закон склеивания листов [4]. Мы предлагаем более перспективный способ построения функции w, основанный на построении интегральной формулы, аналогичной известной формуле Кристоффеля — Шварца [5]. Зная закон склеивания листов, легко найти число точек ветвления поверхности $\mathbf{R}$, лежащих над a_ν, и кратности этих точек ветвления. Для этого достаточно разложить подстановку σ_ν на циклы и отметить все те циклы, длины которых больше единицы (т. е. те, которые дают положительный вклад в индекс ветвления поверхности $\mathbf{R}$). Пусть точка ветвления (a_ν, w_ν) имеет кратность $\gamma_\nu\geqslant 2$. Здесь w_ν — неизвестное, и пусть p — число этих неизвестных. Одному значению a_ν соответствует несколько различных w_ν, но мы условимся для простоты нумеровать только различные значения w_ν. Пусть, далее, над точкой $z=\infty$ лежат q точек $(\infty, \tilde{w}_1), \ldots, (\infty, \tilde{w}_4)$ кратностей $\lambda_1\geqslant 1, \ldots, \lambda_q\geqslant 1$ соответственно, где все $\tilde{w}_\nu\in\mathbf{C}$. В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. *Функцию, реализующую конформный гомеоморфизм плоскости $\widehat{\mathbf{C}}_w$ на n-листную рода нуль поверхность наложения $\mathbf{R}$ плоскости $\widehat{\mathbf{C}}_z$, можно задать равенством*

$$z = C + \gamma_0 \int\limits_{\hat{w}}^{w} \prod_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} \prod_{\mu=1}^{q} (\zeta - \tilde{w}_\mu)^{-\lambda_\mu - 1}\, d\zeta, \qquad (4)$$

где C, γ_0, $\tilde{w}$ — произвольные постоянные, а неизвестные w_ν, $\tilde{w}_\mu$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_s = C + \gamma_0 \int\limits_{\tilde{w}}^{w_s} \prod\limits_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} \prod\limits_{\mu=1}^{q} (\zeta - \tilde{w}_\mu)^{-\lambda_\mu - 1} d\zeta, \\ \qquad\qquad s = 1, \ldots, p; \\ \operatorname*{res}\limits_{\zeta = \tilde{w}_j} \left[\prod\limits_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} \prod\limits_{\mu-1}^{q} (\zeta - \tilde{w}_\mu)^{-\lambda_\mu - 1} \right] = 0, \\ \qquad\qquad j = 1, \ldots, q. \end{cases} \tag{5}$$

Первая группа уравнений системы (5) выражает тот факт, что $(a_s, w_s) \in \mathbf{R}$. Мы условились нумеровать только различные значения w_s, сопоставляя им нужное число раз одно и то же значение a_s. Вторая группа уравнений (5) гарантирует то, что интеграл (4) есть рациональная функция от w (не содержит логарифмических слагаемых), т. е. уравнение (4) — алгебраическое от z и w.

Отметим некоторые частные случаи формулы (4). Если подстановка σ_∞ — цикл длины n, то точек $\tilde{w}_\mu$ нет вовсе, и если потребовать, чтобы при $w \to \infty$ было $z \sim w^n$, то формула (4) переходит в такую:

$$z = C + n \int\limits_{\tilde{w}}^{w} \prod_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} d\zeta, \tag{6}$$

где $\Sigma(\gamma_\nu - 1) = n - 1$. Если, кроме того, $p = 2$ (т. е. имеется всего три точки ветвления), то можно положить $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, и формула (4) конкретизируется так:

$$z = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{\mathrm{B}(\gamma_1 \gamma_2)} \int\limits_0^w \zeta^{\gamma_1 - 1} (1 - \zeta)^{\gamma_2 - 1} d\zeta, \tag{7}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{N}$; $\gamma_1 \geqslant 2$, $\gamma_2 \geqslant 2$; $\gamma_1 + \gamma_2 = n + 1$, а $B(\gamma_1, \gamma_2)$ — бета-функция Эйлера.

3. Предположим теперь, что уравнение (1) задает риманову поверхность $\mathbf{R}$ рода $\rho \geqslant 1$, т. е. гомеоморфную сфере с ρ ручками. Пусть n — степень уравнения (1) по переменной w. Пользуясь диаграммой Ньютона, можно представить $\mathbf{R}$ в виде n-листного накрытия расширенной плоскости $\hat{\mathbf{C}}_z$, причем вычисляются проекции всех точек ветвления этого накрытия, а также закон склеивания листов. Так как $\mathbf{R}$ — замкнутая поверхность рода $\rho \geqslant 1$, то на ней существует ρ простых замкнутых попарно непересекающихся кривых, которые ее не разбивают и не проходят через точки ветвления. Пусть $\mathbf{A}$ — одна из таких кривых. Предположим для простоты, что кривая $\mathbf{A}$ однолистна, т. е. сужение отображения проектирования $(z, w) \to z$ на $\mathbf{A}$ есть гомеоморфизм. Присоединим к $\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}$ два берега разреза $\mathbf{A}$. Разрежем плоскость $\hat{\mathbf{C}}_z$ по образу разреза $\mathbf{A}$ при отображении проектирования $(z, w) \to z$. В результате получим две замкнутые области: ограниченную $\bar{D}^+$ и неограниченную $\bar{D}^-$. Приклеим эти области к разрезанной поверхности следующим образом. Край области $\bar{D}^+$ склеиваем с внешним берегом разреза $\mathbf{A}$, а край области $\bar{D}^-$ склеиваем с внутренним берегом разреза $\mathbf{A}$. В результате склеивания возникла замкнутая $(n+1)$-листная накрывающая поверхность, индекс ветвления которой такой же, как у поверхности $\mathbf{R}$. Следовательно, род новой поверхности равен $\rho - 1$. Если $\rho - 1 \geqslant 1$, то проделываем такую же операцию с новой поверхностью. Продолжая этот процесс, мы в конечном счете получим $(n+\rho)$-листное накрытие $\tilde{\mathbf{R}}$ плоскости $\hat{\mathbf{C}}_z$, род которого равен нулю, причем известны проекции всех ее точек ветвления и закон

склеивания листов. Применяя к $\tilde{\mathbf{R}}$ результаты предыдущего пункта, заключаем, что существует рациональная функция $z=\varphi(\zeta)$, реализующая конформный гомеоморфизм плоскости $\hat{\mathbf{C}}_\zeta$ на поверхность $\tilde{\mathbf{R}}$ (и некоторой 2ρ-связной плоской области на разрезанную поверхность $\mathbf{R}$). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Для любого алгебраического соответствия (1) существует глобальная униформизация (2), такая, что хотя бы одна из функций φ или ψ — рациональная.*

Существование такой униформизации принципиально важно с точки зрения ее фактического нахождения.

Список литературы

1. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 234.
2. Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. М., 1969.
3. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.; Л., 1936.
4. Джураев О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. № 3. С. 53.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973. С. 175.

Поступила в редакцию 02.07.90.

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, А. Л. ТОПЧИШВИЛИ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Теория несобственных задач линейного и выпуклого программирования разработана в 70—80-е годы [1]. Практика применения дискретных моделей требует создания аналогичной теории несобственных задач дискретной оптимизации. Способы анализа противоречивых моделей выпуклого программирования связаны с разными методами аппроксимации несовместных систем выпуклых ограничений. В статье предлагается метод аппроксимации систем выпуклых диофантовых неравенств совместными системами, основанный на доказанном свойстве порядковой выпуклости функции невязки. Тем самым будет построен один из способов анализа несобственных задач выпуклой дискретной оптимизации.

Пусть Z^n—решетка целочисленных векторов, Z^n_+—подрешетка векторов с неотрицательными координатами. Пусть $a_i : Z^n_+ \to R$ — порядково-выпуклые неубывающие для $i = 1, \ldots, m$ и невозрастающие для $i = m+1, \ldots, m+k$ функции. Напомним, что функция $f : Z^n \to R$ называется порядково-выпуклой, если ее (i, j) — градиенты $\nabla_{ij}f(x)$, определяемые правилом $\nabla_{ij}f(x)=f(x+e_i+e_j)-f(x+e_i)-f(x+e_j)+f(x)$, не имеют отрицательных значений для всех x и i, j.

Рассмотрим систему диофантовых неравенств: $x \in Z^n_+$,

$$a_i(x) \leqslant 0, \ i = 1, \ldots, m+k. \tag{1}$$

В частном случае функции a_i могут быть линейными:

$$a_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_j - b_i', \ i = 1, \ldots, m,$$

$$a_i''(x) = b_i'' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' x_j, \ i = m+1, \ldots, m+k$$

(все a_{ij}', a_{ij}'' — неотрицательны), т. е. речь идет о коррекции следующей системы линейных диофантовых неравенств: $x \in Z^n_+$,