5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 530.12 : 530.145

А. И. ТИМОЩЕНКО

УРАВНЕНИЕ ДАФФИНА — КЕММЕРА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0 В ПОЛЕ КЕРРА — НЬЮМЕНА

В [1—3] приведены общековариантные уравнения Даффина — Кеммера (ДК) для векторной частицы и рассмотрены некоторые точные решения этих уравнений для пространства де Ситтера. В [4] получены сведения о всевозможных операторах симметрии уравнений ДК для свободной частицы и при наличии некоторых внешних электромагнитных полей специального вида. В [5] установлены общие свойства операторов условной симметрии [6] уравнений ДК во внешних электромагнитных полях на фоне риманового пространства-времени. В настоящей работе рассматривается разделение переменных в уравнении ДК для частицы со спином 0 в поле Керра — Ньюмена (КН) и исследуются некоторые его возможные симметрии.

Уравнение ДК на фоне риманового пространства-времени имеет вид [1]:

$$[\gamma^{\mu}(\nabla_{\mu}-ie_0A_{\mu})+m_0]\psi=0, \qquad (1)$$

где греческие индексы относятся к произвольной системе референции; $\gamma^{\mu} \leqslant h^{\mu}_{\cdot k}\gamma^{k}$ — матрицы ДК; $h^{\mu}_{\cdot k}$ — векторы лоренцева базиса, в котором γ^{k} постоянны, латинские индексы нумеруют эти векторы; $\nabla_{\mu}=\partial_{\mu}+\Gamma_{\mu}$, $\partial_{\mu}=\partial/\partial x^{\mu}$, $\Gamma_{\mu}=\Gamma_{mn\mu}\gamma^{m}\gamma^{n}$; $\Gamma_{mn\mu}$ — коэффициенты вращения Риччи; A_{μ} — вектор-потенциал электромагнитного поля; e_0 и m_0 — постоянные, описывающие заряд и массу частицы. Для частицы со спином 0 $\psi=$ $=\mathrm{colon}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ (colon — столбец). При разделении переменных в (1) в поле КН все величины удобно отнести к изотропному базису Ньюмена-Пенроуза $h^{\nu}_{\cdot k}$: $h^{\mu}_{\cdot(1)}=m^{\mu}$, $h^{\mu}_{\cdot(2)}=\bar{m}^{\mu}$, $h^{\mu}_{\cdot(3)}=l^{\mu}$, $h^{\mu}_{\cdot(4)}=k^{\mu}$, в качестве которого берется изотропная тетрада Киннерсли (стандартные обозначения см. в [7]). В координатах Бойера — Линдквиста r, ϑ, φ, t метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты: $g_{11}=\Sigma/\Delta$, $g_{22}=\Sigma$, $g_{33}=(r^2+a^2+a^2f\sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta$, $g_{34}=-af\sin^2\vartheta$, $g_{44}=-(1-f)$, где $\Sigma=r^2+a^2\cos^2\vartheta$; $f=(2Mr-Q^2)/\Sigma$; $\Delta=r^2-2M_{\nu}+Q^2$; M, a, Q — параметры, определяемые массой, угловым моментом и зарядом источника тяготения. Проводя вычисления, аналогичные методу Тюкольского (см., напр., [8]), частное решение (1) в поле КН можно представить в виде:

$$\psi=\mathrm{colon}(R_0\Theta_0,\ R_0\Theta_1/\bar{p},\ R_0\Theta_2/p,\ R_1\Theta_0/\Delta,\ R_2\Theta_0/\Sigma)\,e^{i,(m\varphi-\omega t)}$$

где величины R зависят только от r, а Θ — от ϑ; m и ω — константы разделения; $p=r+ia\cos\vartheta$. Функции R_1, R_2, Θ_1 и Θ_2 определяются через R_0 и Θ_0 выражениями:

$$\sqrt{2}m_0R_1=\Delta D^{-}R_0,\quad \sqrt{2}m_0R_2=-\Delta D^{+}R_0,$$
$$\sqrt{2}m_0\Theta_1=-L^{-}\Theta_0,\quad \sqrt{2}m_0\Theta_2=-L^{+}\Theta_0,$$

где введены операторы:

$$D^{\pm}=\frac{\partial}{\partial r}\pm\frac{i}{\Delta}\left[\omega(r^2+a^2)-ma-md-e_0qr\right],$$
$$L^{\pm}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\pm\left(\omega a\sin\vartheta-\frac{m}{\sin\vartheta}\right),$$

q — величина заряда источника тяготения. Функции R_0 и Θ_0 подчиняются уравнениям:

$$(D^+\Delta D^- + D^-\Delta D^+) R_0 - (\lambda + 2m_0^2 r^2) R_0 = 0,$$
$$(L^+L^- + L^-L^+)\Theta_0 + \operatorname{ctg}\vartheta\,(L^+ + L^-)\Theta_0 + (\lambda - 2m_0^2 a^2\cos^2\vartheta)\Theta_0 = 0,$$

причем λ — безразмерная константа разделения.

В [8] показано, что разделение переменных в уравнениях Якоби, Кляйна — Фока и Дирака в поле КН возможно ввиду наличия в этом пространстве-времени по крайней мере трех операторов симметрии. Два из них являются лиевскими операторами [6] $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial\varphi$. Третий оператор соответствует бивектору Яно — Киллинга, допустимому в этом пространстве. Было установлено [5], что для уравнения ДК не существует операторов симметрии, связанных с этим бивектором. Если учесть указанные лиевские операторы симметрии, в случае уравнения ДК остается единственная возможность построить оператор симметрии Q этого уравнения в виде:

$$Q = E^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}(\nabla_{\lambda} - ie_0 A_{\lambda}) + \Phi E, \tag{2}$$

где $E_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon_{\lambda\varkappa\mu\nu}E^{\varkappa}$ — некоторый тривектор, $\varepsilon_{\lambda\varkappa\mu\nu}$ — псевдотензор Леви-Чивитта, Φ — скаляр; эти величины подчиняются уравнениям [5].

$$\nabla_{\lambda} E^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = 0,\ \partial_{\lambda}\Phi - ie_0\tilde{F}_{\lambda\varkappa}E^{\varkappa} = 0,\ \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}F^{\lambda\varkappa}. \tag{3}$$

Можно показать, что система (3) в поле КН совместна только при тривиальном решении: $\Phi = \mathrm{const}$, $E^{\mu} = 0$.

Таким образом, уравнение (1) имеет лишь два независимых оператора симметрии, а четыре независимые переменные разделились полностью.

По-видимому, в данном случае следует обратиться к расширению метода разделения переменных [6], переходя к отысканию операторов условной симметрии уравнения (1). Ограничимся рассмотрением частного случая, когда оператор Q имеет вид (2) и подчиняется коммутационному соотношению

$$[Q,\ L] = SQ, \tag{4}$$

где [,] — коммутатор, L — оператор уравнения (1), S — некоторая матрица. Из (1) и (4) следует, что $S = \pi_{\lambda}\gamma^{\lambda}$, $\pi_{\lambda} = -\tilde{F}_{\lambda\varkappa}J^{\varkappa} - \partial_{\lambda}\ln|\Phi|$, $J^{\varkappa} = \frac{ie_0}{\Phi}E^{\lambda}$, $\Phi \neq 0$, а псевдовектор $J^{\varkappa}$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\nabla_{[\mu}J_{\nu]} - \tilde{F}_{[\mu}{}^{\lambda}{}_{.}J_{\nu]}J_{\lambda} = 0. \tag{5}$$

Решая (5) в изотропном базисе Киннерсли, найдем, что в поле КН реализуются две возможности.

1. $J_{(1)} = J_{(3)} = 0$,

$$J_{(2)} = \frac{ip\Sigma}{2ar\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Delta}{\Sigma}F\right),\quad J_{(4)} = F.$$

2. $J_{(1)} = J_{(4)} = 0$,

$$J_{(2)} = -\frac{ip\Sigma}{2ar\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G}{\Sigma}\right),\quad J_{(3)} = \frac{G}{\Sigma},$$

где $F = F(r)$ и $G = G(r)$ — произвольные функции r. Функция Φ в обоих случаях остается неопределенной.

Итак, в случае разделения переменных в одном уравнении должен существовать полный набор операторов, коммутирующих между собой и с оператором уравнения. Для уравнений, описывающих квантовые объекты, собственные значения этих операторов однозначно определяют чистые состояния, а волновые функции являются произведениями собственных волновых функций каждого из операторов. Если квантовый объект подчиняется матричному дифференциальному уравнению, то с математической точки зрения уже не столь очевидным является требование существования полного набора операторов, коммутирующих между собой и с оператором уравнения, как необходимое и достаточное условие разделения переменных. Это подтверждается доказанной в [6] теоремой и рассмотренным нами случаем уравнения ДК для частицы со спином 0 в поле КН. Можно предположить, что возможность расширения метода разделения переменных заложена в тех случаях, когда $\psi^+\psi$ (крест означает обычное эрмитовское сопряжение) не имеет смысла плотности вероятности.

Список литературы

1. Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М. Общековариантный формализм Даффина — Кеммера и сферические волны для векторного поля в пространстве де Ситтера. Минск, 1986. 45 с. (АН БССР. Ин-т физики. Препринт № 426).
2. Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 1. С. 58.
3. Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М. // VII Всесоюзн. конференц. Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации: Тез. докл. Ереван, 1988. С. 249.
4. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, 1983.
5. Тимощенко А. И. // Гравитация и электромагнетизм. 1990. Вып. 5. С. 162.
6. Фущич В. И., Жданов Р. З. // Симметрии и решения нелинейных уравнений мат. физ. Киев, 1987. С. 17.
7. Точные решения уравнений Эйнштейна / Под ред. Э. Шмутцера. М., 1982.
8. Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М., 1986.

Поступила в редакцию 15.10.90.

УДК 535.34

АН ЧАН МО (КНДР), А. Л. ТОЛСТИК, А. В. ЧАЛЕЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ОВФ-ГОЛОГРАММ В РАСТВОРАХ КРАСИТЕЛЕЙ

При рассмотрении отражательной способности динамических ОВФ-голограмм, формируемых в растворах красителей при встречном четырехволновом взаимодействии, ограничиваются, как правило, приближением заданных полей накачки [1—4]. Учет изменения волн накачки при их распространении в объеме среды приводит к рассмотрению системы дифференциальных уравнений, которые могут быть решены лишь численно [5, 6]. Аналитические аппроксимации численных решений рассматривались в [7]. Анализ проводился для двухуровневой модели резонансной среды. Для растворов красителей характерно частичное перекрытие полос поглощения основного и возбужденного уровней, что обусловливает необходимость привлечения более сложных спектроскопических моделей. При этом вследствие низкого квантового выхода люминесценции в возбужденном канале наряду с резонансным механизмом нелинейности следует учитывать тепловую нелинейность.

В настоящей работе рассмотрены аналитические приближения, позволяющие рассчитать отражательную способность ОВФ-голограмм в красителях, моделируемых трех- и четырехуровневыми схемами. Учтены переходы между возбужденными синглетными (S_1—S_2) и триплетными (T_1 — T_2) состояниями молекул.

Отражательная способность динамических ОВФ-голограмм, равная отношению интенсивностей обращенной и сигнальной волн на входе в нелинейную среду, в приближении заданной накачки описывается формулой [1]

$$R = |\varphi|^2 [\psi + (|\varphi|^2 - \psi^2)^{1/2} \operatorname{ctg}\{(|\varphi|^2 - \psi^2)^{1/2} K_0 L/2\}]^{-2}, \qquad (1)$$

где ψ — нормированный амплитудный коэффициент нелинейного поглощения слабых сигнальной и обращенной волн в присутствии мощных полей накачки; φ — коэффициент параметрической связи волн; K_0 — на-