



УДК 517.925

А. П. ХАПАЛЮК

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

Для решения уравнения Бесселя [1]

$$x^2 \frac{d^2 \hat{Z}(x)}{dx^2} + x \frac{d\hat{Z}(x)}{dx} + (x^2 - \nu^2) \hat{Z}(x) = 0, \quad (1)$$

где ν — постоянное число (порядок уравнения), воспользуемся комплексным преобразованием Фурье, которое, как известно, определяется парой интегралов [5]:

$$\hat{Z}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad \tilde{Z}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Z}(x) e^{ix\xi} dx. \quad (2)$$

Функция $\hat{Z}(x)$ называется оригиналом, $\tilde{Z}(\xi)$ — трансформантой. В дальнейшем вместо двух интегралов (2) будем использовать краткую запись $\hat{Z}(x) \rightarrow \tilde{Z}(\xi)$ (стрелка всегда направлена от оригинала к трансформанте). Для записи оригиналов и трансформант используются одинаковые буквы, но аргументы оригиналов обозначаются малыми латинскими, а трансформант — малыми греческими буквами, и это считается их отличительным признаком. Поэтому далее надстрочные знаки над оригиналами ($\wedge$) и трансформантами ($\vee$) будут опускаться.

Применяя преобразование Фурье (2) к уравнению Бесселя (1), получим дифференциальное уравнение для трансформант

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 Z(\xi)}{d\xi^2} + 3\xi \frac{dZ(\xi)}{d\xi} + (1 - \nu^2) Z(\xi) = 0. \quad (3)$$

Теперь учтем, что любое решение уравнения (3) является трансформантой некоторого решения уравнения (1) и наоборот. Таким образом, между решениями уравнений (1) и (3) можно установить взаимно однозначное соответствие вида (2). В математическом отношении решения уравнения (3) проще решений уравнения (1). Это дает возможность сравнительно сложные решения уравнения Бесселя представить единым образом как обратные преобразования Фурье простых решений уравнения (3). Этот метод имеет ряд преимуществ, в частности, он легко выявляет многие особенности решений уравнения Бесселя, в том числе такие, которые не нашли отражения в классическом анализе [1].

Решениями уравнения (3) являются элементарные с точками ветвления функции. Конкретные их значения зависят от выбора ветвей и могут быть записаны по-разному. Анализ показывает, что имеется всего четыре варианта выбора линейно независимых решений. Для определенности возьмем следующий их вариант (b -решения):

$$\begin{aligned}
b_v^{(1)}(\xi) &= \begin{cases} e^{iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{-i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \\ e^{iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi - i \sqrt{1 - \xi^2})^v}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \\ e^{-iv \frac{\pi}{2} \frac{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \end{cases}, & b_v^{(2)}(\xi) &= \begin{cases} e^{-iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \\ e^{-iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi + i \sqrt{1 - \xi^2})^v}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \\ e^{iv \frac{\pi}{2} \frac{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{-i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \end{cases}, \\
b_v^{(3)}(\xi) &= \begin{cases} e^{-iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{-i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \\ e^{-iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi + i \sqrt{1 - \xi^2})^v}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \\ e^{iv \frac{\pi}{2} \frac{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \end{cases}, & b_v^{(4)}(\xi) &= \begin{cases} e^{iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \\ e^{iv \frac{\pi}{2} \frac{(\xi - i \sqrt{1 - \xi^2})^v}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \\ e^{-iv \frac{\pi}{2} \frac{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^v}{-i \sqrt{\xi^2 - 1}}} \end{cases},
\end{aligned} \quad (4)$$

где верхняя строчка определяет решение при $\xi > 1$, средняя — при $|\xi| < 1$, нижняя — при $\xi < -1$.

Для нецелых порядков v эти решения линейно независимы и удовлетворяют условиям (звездочка означает комплексное сопряжение):

$$b_v^{(2)}(\xi) = b_v^{(1)*}(\xi), \quad b_v^{(3)} = b_{-v}^{(1)}(\xi), \quad b_v^{(4)}(\xi) = b_{-v}^{(1)*}(\xi), \quad (5)$$

которые переходят в условия для оригиналов

$$b_v^{(2)}(x) = b_v^{(1)*}(-x), \quad b_v^{(3)}(x) = b_{-v}^{(1)}(x), \quad b_v^{(4)}(x) = b_{-v}^{(1)*}(-x). \quad (6)$$

Дело, как видим, свелось к вычислению обратных преобразований Фурье трансформант (4). Трудности заключаются в том, что не все эти интегралы Фурье сходятся в обычном смысле и в известной нам литературе отсутствуют. В [1—4] имеются нужные нам следующие значения интегралов Фурье:

$$\begin{aligned}
b_v^{(1)}(\xi) &\leftarrow \frac{1}{2} [J_v(|x|) + J_v(|x|) \operatorname{sgn} x] = J_v(x_+) \\
b_v^{(2)}(\xi) &\leftarrow \frac{1}{2} [J_v(|x|) - J_v(|x|) \operatorname{sgn} x] = J_v(x_-) \\
b_v^{(3)}(\xi) &\leftarrow \cos v\pi J_v(x_+) - \sin v\pi Y_v(x_+) = J_{-v}(x_+) \\
b_v^{(4)}(\xi) &\leftarrow \cos v\pi J_v(x_-) - \sin v\pi Y_v(x_-) = J_{-v}(x_-)
\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} v > -1, \\ (|v| < 1), \end{array} \right\} \quad (7)$$

где использованы обозначения [5]

$$f(x_{\pm}) = f(|x|) \Theta(\pm x), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \quad (8)$$

а J_v и Y_v — известные функции Бесселя первого и второго рода [1]. Таким образом, формулы (7) для $|v| < 1$, $v \neq 0$ определяют все четыре линейно независимые решения уравнения Бесселя. Они, как видно, не совпадают с классическими решениями [1] и их следует рассматривать в области обобщенных функций (обобщенные решения).

Теперь нужно снять ограничения на порядок v в (7). Хотя за пределами этих ограничений интегралы Фурье не сходятся в обычном смысле, они существуют как обобщенные функции. Несколько громоздкие, но в принципе несложные выкладки показывают, что их можно определить по формулам ($v = m + \lambda$, m — целое число):

$$\begin{aligned}
b_v^{(1)}(x) &= i^m T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) b_{\lambda}^{(1)}(x) + \lambda i^{m-1} U_m \left(i \frac{d}{dx} \right) \left[\frac{1}{x} b_{\lambda}^{(1)}(x) \right], \\
b_v^{(2)}(x) &= (-i)^m T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) b_{\lambda}^{(2)}(x) - \lambda (-i)^{m-1} U_m \left(i \frac{d}{dx} \right) \left[\frac{1}{x} b_{\lambda}^{(2)}(x) \right], \\
b_v^{(3)}(x) &= (-i)^m T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) b_{\lambda}^{(3)}(x) - \lambda (-i)^{m-1} U_m \left(i \frac{d}{dx} \right) \left[\frac{1}{x} b_{\lambda}^{(3)}(x) \right],
\end{aligned} \quad (9)$$

$$b_v^{(4)}(x) = i^m T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) b_\lambda^{(4)}(x) + \lambda i^{m-1} U_m \left(i \frac{d}{dx} \right) \left[\frac{1}{x} b_\lambda^{(4)}(x) \right].$$

При заданном m всегда можно выбрать такое v , чтобы выполнялось условие $|\lambda| < 1$ и, следовательно, функции $b_v^{(j)}(x)$ в (9) вычислялись по формулам (7). $T_m(\xi)$ и $U_m(\xi)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода, которые здесь определены тождеством

$$(\xi + i \sqrt{1 - \xi^2})^m \equiv T_m(\xi) + i \sqrt{1 - \xi^2} U_m(\xi). \quad (10)$$

В результате все четыре линейно независимые решения уравнения Бесселя (1) для произвольного нецелого порядка v определяются через решения порядка меньше единицы и их производные, которые в области обобщенных функций всегда существуют. Практически вычислить их нетрудно.

При переходе к целому порядку b -решения трансформант (4) вырождаются и становятся линейно зависимыми, часть решений теряется. Недостающие решения нужно находить дополнительно, используя, например, известные методы предельных переходов. Однако проще для целого v ($v=m$) решения уравнения (3) записать в другом виде:

$$\begin{aligned} Z_m^{(1)}(\xi) = T_m(\xi) \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ 0 \end{cases}, \quad Z_m^{(2)}(\xi) = T_m(\xi) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases} \\ Z_m^{(3)}(\xi) = T_m(\xi) \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{\xi^2-1}} \\ 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases}, \quad Z_m^{(4)}(\xi) = U_m(\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

Обратные преобразования Фурье выражений (11), хотя не всегда сходятся в обычном смысле, довольно просто находятся в области обобщенных функций по единой схеме. В качестве примера распишем ее более подробно для решений первого рода:

$$\begin{aligned} Z_m^{(1)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-ix\xi} d\xi = T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) J_0(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь подынтегральная функция $T_m(\xi)$ рассматривается как мультипликатор [5—6] и, заменив переменную интегрирования ξ на оператор дифференцирования по x ($\xi \rightarrow i \frac{d}{dx}$), выносится из-под знака интеграла. Аналогично вычисляются остальные три решения:

$$\begin{aligned} 2i^m Z_m^{(2)}(x) &= i^m T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) Y_0(|x|), \\ 2i^m Z_m^{(3)}(x) &= i^m T_m \left(i \frac{d}{dx} \right) [J_0(|x|) \operatorname{sgn} x], \\ i^m Z_m^{(4)}(x) &= i^{m-1} U_m \left(i \frac{d}{dx} \right) \delta(x), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta(x)$ — импульсная функция Дирака [5—6]. Исключением является $m=0$, когда $Z_m^{(4)}(x)$ вырождается. Это недостающее решение может быть определено по формуле:

$$Z_0^{(4)}(x) = Y_0(|x|) \operatorname{sgn} x \div \frac{4}{\pi} \begin{cases} \frac{\ln(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}{-i\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ \frac{\ln(i\xi + \sqrt{1 - \xi^2})}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ \frac{\ln(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}{i\sqrt{\xi^2 - 1}} \end{cases}. \quad (14)$$

Заметим, что производные от этого решения не могут быть решениями уравнения Бесселя других порядков, так как их трансформанты содержат логарифмы и не могут быть решениями уравнения (3).

На этом заканчивается формальное решение уравнения Бесселя для произвольного порядка ν . Очевидно, что для каждого порядка получено четыре линейно независимых решения. Нетрудно проверить, например, прямой подстановкой, что все они действительно удовлетворяют уравнению Бесселя. Вместо двух классических получается четыре обобщенных решения. Между ними имеется принципиальная разница. В частности, среди полученных здесь решений отсутствуют функции Бесселя второго рода целого порядка $Y_m(x)$. В действительности на оси x это комплексные функции и мнимые их части, а следовательно, и функции в целом не являются решениями уравнения Бесселя. Классическая формула для их определения:

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (15)$$

является ошибочной. Дело в том, что решения $J_{\pm\nu}(x)$, вопреки существующим утверждениям [1], не являются аналитическими функциями переменного ν . При целочисленных значениях ν , как легко заметить из их трансформант, они могут иметь простые полюса, из-за чего формула (15) становится непригодной. Вместо формулы (15) можно предложить две (для нечетного и четного решений) формулы

$$Y_\nu^{(1)}(|x|) \operatorname{sgn} x = \frac{1}{2 \cos \nu \frac{\pi}{2}} \{ \cos \nu\pi [b_\nu^{(1)}(x) - b_\nu^{(2)}(x)] - [b_\nu^{(3)}(x) - b_\nu^{(4)}(x)] \},$$

$$Y_\nu^{(2)}(|x|) = \frac{1}{2 \sin \nu \frac{\pi}{2}} \{ \cos \nu\pi [b_\nu^{(1)}(x) + b_\nu^{(2)}(x)] - [b_\nu^{(3)}(x) + b_\nu^{(4)}(x)] \}, \quad (16)$$

которые справедливы для любого ν .

Полученные здесь особенности решений уравнения Бесселя легко просматриваются для решений полуцелых порядков, когда все они выражаются через элементарные функции. В действительности классические решения полуцелого порядка являются комплексными функциями. Так как исходное уравнение действительное, то мнимая и действительная части классических решений по отдельности будут решениями. Например, при $\nu = \frac{1}{2}$ имеем:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x_+}{\sqrt{x_+}} \pm i \frac{\sin x_-}{\sqrt{x_-}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{\cos x_+}{\sqrt{x_+}} \frac{\cos x_-}{\sqrt{x_-}}, \quad (17)$$

что и приводит к четырем линейно независимым решениям. Естественно, что эти четыре решения получаются также из общих формул (7) и (9).

Список литературы

1. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М., 1949. Т. 1.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М., 1969. Т. 1.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.

5. Гельфанд И. М., Шнлов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.

6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 530.12 : 530.145

А. И. ТИМОЩЕНКО

УРАВНЕНИЕ ДАФФИНА — КЕММЕРА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0 В ПОЛЕ КЕРРА — НЬЮМЕНА

В [1—3] приведены общековариантные уравнения Даффина — Кеммера (ДК) для векторной частицы и рассмотрены некоторые точные решения этих уравнений для пространства де Ситтера. В [4] получены сведения о всевозможных операторах симметрии уравнений ДК для свободной частицы и при наличии некоторых внешних электромагнитных полей специального вида. В [5] установлены общие свойства операторов условной симметрии [6] уравнений ДК во внешних электромагнитных полях на фоне риманового пространства-времени. В настоящей работе рассматривается разделение переменных в уравнении ДК для частицы со спином 0 в поле Керра — Ньюмена (КН) и исследуются некоторые его возможные симметрии.

Уравнение ДК на фоне риманового пространства-времени имеет вид [1]:

$$[\gamma^\mu (\nabla_\mu - ie_0 A_\mu) + m_0] \psi = 0, \quad (1)$$

где греческие индексы относятся к произвольной системе референции; $\gamma^\mu \leq h_{\cdot k}^\mu \gamma^k$ — матрицы ДК; $h_{\cdot k}^\mu$ — векторы лоренцева базиса, в котором γ^k постоянны, латинские индексы нумеруют эти векторы; $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $\Gamma_\mu = \Gamma_{mn\mu} \gamma^m \gamma^n$; $\Gamma_{mn\mu}$ — коэффициенты вращения Риччи; A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля; e_0 и m_0 — постоянные, описывающие заряд и массу частицы. Для частицы со спином 0 $\psi = \text{colon}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ (colon — столбец). При разделении переменных в (1) в поле КН все величины удобно отнести к изотропному базису Ньюмена-Пенроуза $h_{\cdot k}^\mu$: $h_{\cdot (1)}^\mu = m^\mu$, $h_{\cdot (2)}^\mu = \bar{m}^\mu$, $h_{\cdot (3)}^\mu = l^\mu$, $h_{\cdot (4)}^\mu = k^\mu$, в качестве которого берется изотропная тетрада Киннерсли (стандартные обозначения см. в [7]). В координатах Бойера — Линдквиста r, ϑ, φ, t метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты: $g_{11} = \Sigma/\Delta$, $g_{22} = \Sigma$, $g_{33} = (r^2 + a^2 + a^2 f \sin^2 \vartheta) \sin^2 \vartheta$, $g_{34} = -af \sin^2 \vartheta$, $g_{44} = -(1-f)$, где $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$; $f = (2Mr - Q^2)/\Sigma$; $\Delta = r^2 - 2Mv + Q^2$; M, a, Q — параметры, определяемые массой, угловым моментом и зарядом источника тяготения. Проводя вычисления, аналогичные методу Тюкольского (см., напр., [8]), частное решение (1) в поле КН можно представить в виде:

$$\psi = \text{colon}(R_0 \Theta_0, R_0 \Theta_1 / \rho, R_0 \Theta_2 / \rho, R_1 \Theta_0 / \Delta, R_2 \Theta_0 / \Sigma) e^{i(m\varphi - \omega t)}$$

где величины R зависят только от r , а Θ — от ϑ ; m и ω — константы разделения; $\rho = r + ia \cos \vartheta$. Функции R_1, R_2, Θ_1 и Θ_2 определяются через R_0 и Θ_0 выражениями:

$$\sqrt{2m_0} R_1 = \Delta D^- R_0, \quad \sqrt{2m_0} R_2 = -\Delta D^+ R_0,$$

$$\sqrt{2m_0} \Theta_1 = -L^- \Theta_0, \quad \sqrt{2m_0} \Theta_2 = -L^+ \Theta_0,$$

где введены операторы:

$$D^\pm = \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{\Delta} [\omega(r^2 + a^2) - ma - md - e_0 q r],$$

$$L^\pm = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \left(\omega a \sin \vartheta - \frac{m}{\sin \vartheta} \right),$$