По формулам (4) осуществляют так называемый «прямой ход». Вероятности $P(X_{t+1}^N/d_t=i)$ находят с помощью «обратного хода»:

$$P(X_N^N/d_{N-1}=i) = p_i^{x_N}(1-p_i)^{1-x_N}(1-g_i) + p_{\bar{i}}^{x_N}(1-p_{\bar{i}})^{1-x_N} g_i,$$

$$P(X_{N-t+1}^N/d_{N-t}=i) = p_i^{x_{N-t+1}}(1-p_i)^{1-x_{N-t+1}}(1-g_i)\times \qquad (6)$$

$$\times P(X_{N-t+2}^N/d_{N-t+1}=i) + p_{\bar{i}}^{x_{N-t+1}}(1-p_{\bar{i}})^{1-x_{N-t+1}} P(X_{N-t+2}^N/d_{N-t+1}=\bar{i})\times$$

$$\times g_{\bar{i}},\ 2\leqslant t\leqslant N-1.$$

Формулы (5) и (6) позволяют вычислить вероятности (4). Теорема доказана.

2. Случай неизвестных параметров. Если параметры неизвестны, то предлагается вначале найти их оценки по методу максимального правдоподобия, а затем использовать их для оценки моментов разладки в формулах (4)—(6). Однако получение аналитических выражений для оценок максимального правдоподобия затруднительно в связи с громоздким видом функции правдоподобия $P(X_1^N)$. Поэтому будем решать задачу оценивания параметров численно. Для этого пригодны прямые методы поиска экстремума функции. Функция правдоподобия $P(X_1^N)$ в любой точке вычисляется по формулам (5).

3. Экспериментальное исследование. Проверка работоспособности предложенного алгоритма оценивания моментов разладки осуществлялась на модельных реализациях бинарных последовательностей. Результаты, полученные с помощью ЭВМ, показывают, что алгоритм работает удовлетворительно при $0\leqslant p_1\leqslant 0{,}3$; $0{,}7\leqslant p_2\leqslant 1$; $0\leqslant g_i\leqslant 0{,}25$; $c_{ij}(t)=1-\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $50\leqslant N\leqslant 1\,000$. При этом предполагалось, что параметры p_1, p_2, g_1, g_2 неизвестны. Относительный штраф, равный отношению числа неверно определенных состояний АПСВ к объему выборки N, не превышал 0,15.

Список литературы

1. Клигене Н., Телькснис Л. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 5.
2. Харин Ю. С. // Статистические проблемы управления. 1984. Вып. 65. С. 225.
3. Моттль В. В., Мучник И. Б., Яковлев В. Г. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 84.

Поступила в редакцию 24.04.89.

УДК 519.872

Н. В. ЛУНЕВА

О ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ $M/G/1$ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ УПРАВЛЕНИЯ

Имеется однолинейная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием, в которую поступает простейший поток требований интенсивности $\lambda>0$. Прибор может работать в двух режимах. При работе в l-ом режиме время обслуживания требования имеет функцию распределения (ф. р.) $B_l(t)$ $(l=1,\ 2)$. Предполагается, что $\beta_2^1<\lambda^{-1}$, где $\beta_l^1 = \int\limits_0^\infty (1-B_l(t))\,dt$. Изменение режима работы может происходить в момент окончания обслуживания очередного требования. Фиксируются натуральные числа m_1 и m_2, называемые порогами, $0\leqslant m_1\leqslant m_2<+\infty$. Если число i требований в системе в момент окончания обслуживания удовлетворяет неравенству $i\leqslant m_1$, следующее требование может обслужиться только в первом режиме. Если $i>m_2$, обслуживание осуществляется во втором режиме. В случае $m_1 < i \leqslant m_2$ сохраняется прежний режим обслуживания. Такая стратегия управления режимом работы называется гистерезисной. Существует ряд работ, в которых исследуется СМО с гистерезисной стратегией управления скоростью обслуживания, например, в [1] получены производящие функции распределения числа требований в системе в моменты окончания обслуживания очередного требования.

В данной работе решается задача нахождения преобразования Лапласа — Стилтьеса (ПЛС) ф. р. периода занятости, который является одной из основных характеристик исследуемой системы. Периодом занятости системы называется промежуток времени с момента поступления требования в свободную систему и до первого последующего момента освобождения системы от требований. Пусть в некоторый момент окончания обслуживания очередного требования в системе находится k требований. Под k-периодом занятости будем понимать период с момента начала обслуживания требования, когда в системе находится k ($k \geqslant 1$) требований, и до первой готовности к обслуживанию, когда в системе находится $k-1$ требование. Очевидно, что 1-период совпадает с периодом занятости. Назовем k-период k-периодом первого типа, если он начинается с использования первого режима обслуживания $B_1(t)$, в противном случае — k-периодом второго типа.

Лемма 1. Для $\forall k > m_1$ ПЛС ф. р. k-периода второго типа $h(s)$ является единственным решением функционального уравнения

$$h(s) = \beta_2(s + \lambda(1 - h(s))), \quad /h(s)/ \leqslant 1, \tag{1}$$

аналитическим при $Res > 0$.

Доказательство леммы является очевидным, поскольку k-период второго типа совпадает по распределению с периодом занятости системы $M/B_2(t)/1/\infty$ и, следовательно, удовлетворяет (1) [2].

Лемма 2. Пусть $P(k)$ — вероятность непрерывной работы в первом режиме в течение k-периода первого типа. Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$P(k) = \beta_1(\lambda)\left(1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} P(k+i)\right)^{-1}, \quad 0 < k \leqslant m_2. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть ξ — длительность k-периода первого типа. Тогда $\xi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{\alpha} \xi_i$, где ξ_0 — время обслуживания k-го требования в первом режиме; α — количество требований, поступивших за время ξ_0, ξ_i ($i = \overline{1, \alpha}$) — периоды занятости, порожденные требованиями, поступившими за время (ξ_0). Будем использовать запись ($\eta \leqslant m_2$) для обозначения события, состоящего в том, что в течение случайного времени η количество требований в системе ни разу не превысило порога m_2, ($\eta > m_2$) — хотя бы один раз превысило. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(k) = P(\xi \leqslant m_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \leqslant m_2 \mid \alpha = n) P(\alpha = n) = \sum_{n=0}^{m_2-k+1} P(\xi_i \leqslant m_2,$$

$$i = \overline{0, n} \mid \alpha = n) P(\alpha = n).$$

С учетом формул:

$$P(\xi_0 \leqslant m_2 / \alpha = n, \ n \leqslant m_2 - k + 1) = 1,$$

$$P(\xi_j \leqslant m_2 \mid \alpha = n, \ \xi_0 \leqslant m_2, \ \xi_i \leqslant m_2, \ i = \overline{j+1, n}) = P(k - 1 + j),$$

имеем

$$P(k) = \sum_{n=0}^{m_2-k+1} P(\alpha = n) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) = \sum_{n=0}^{m_2-k+1} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} dB_1(y) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+1) =$$

$$= \beta_1(\lambda) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i). \tag{3}$$

Разрешив уравнение (3) относительно $P(k)$, получаем (2).

Лемма 3. Пусть $h_{k,H}(s)$ — ПЛС ф. р. k-периода первого типа, при условии, что в течение этого периода не произошло ни одного переключения режима. Тогда

$$h_{k,H}(s) = \frac{\beta_1(s+\lambda)}{P(k)} \left[1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} P(k+i) h_{k+i,H}(s)\right]^{-1},$$

$$0 < k \leqslant m_2. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$h_{k,H}(s) = \mathrm{M}(e^{-s\xi}/\xi \leqslant m_2) = \frac{1}{P(k)} \int_0^\infty \mathrm{M}(e^{-s\xi} I_{(\xi \leqslant m_2)}/\xi_0 = y)\, dB_1(y), \tag{5}$$

где $I_{(A)}$ — индикатор множества A. Определим следующие события $B_n = (\alpha = n) \bigcap_{i=1}^{\alpha} (\xi_i \leqslant m_2)$, $n = \overline{0,\ m_2 - k + 1}$. Очевидно, что $B_i \cap B_j = \varnothing$ и $\bigcup_{n=0}^{m_2-k+1} B_n = (\xi \leqslant m_2)$. Из (5) получаем:

$$h_{k,H}(s) = \frac{1}{P(k)} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{m_2-k+1} P(B_n/\xi_0 = y)\, \mathrm{M}(e^{-s\xi}/B_n,\ \xi_0 = y)\, dB_1(y). \tag{6}$$

При фиксированном $\alpha = n$ случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и ξ_0 являются независимыми, следовательно,

$$P(B_n/\xi_0 = y) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\alpha} (\xi_i \leqslant m_2)/\alpha = n,\ \xi_0 = y\right) P(\alpha = n/\xi_0 = y) =$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\xi_i \leqslant m_2)\right) P(\alpha = n/\xi_0 = y) = \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i).$$

Если в течение всех ξ_i, $i = \overline{1, n}$, переключение ни разу не произошло случайные величины ξ_i являются независимыми $(k-1+i)$-периодами первого типа, в которых не произошло переключения, поэтому

$$h_{k,H}(s) = \frac{1}{P(k)} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{m_2-k+1} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) e^{-sy} \prod_{i=0}^{n-1} h_{k+i,H}(s)\, dB_1(y) =$$

$$= \frac{1}{P(k)} \sum_{n=0}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) h_{k+i,H}(s).$$

Отсюда легко получить (4). Лемма доказана.

Теорема. Преобразование Лапласа — Стилтьеса $\pi(s)$ ф. р. периода занятости исследуемой системы определяется из соотношений:

$$\pi(s) = h_1(s), \tag{7}$$

$$h_k(s) = \beta_1(s+\lambda) \Bigg\{1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) Q_{k,n}(s) + \zeta_k(s) [\beta_1(s+\lambda) -$$

$$- \beta_1(s + \lambda(1 - h(s)))] - \sum_{n=m_1-k+2}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=k+1}^{m_1} h_i(s) \sum_{j=m_1+1}^{n-k-1} \times$$

$$\times (h_j(s) - h(s))\, h(s)^{j-m-1} \prod_{i=j+1}^{n+k-1} h_{i,H}(s) P(i)\Bigg\}^{-1}, \quad 0 < k \leqslant m_1, \tag{8}$$

$$h_k(s) = \Bigg\{\beta_1(s + \lambda(1 - h(s))) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \Bigg[\sum_{j=k+1}^{n+k-1} (h_j(s) - h(s)) \times$$

$$\times \overset{j-k}{h}(s) \prod_{i=j+1}^{n+k-1} h_{i,\,H}(s)\, P(i) - h(s) \prod_{i=k+1}^{n+k-1} h_{i,\,H}(s)\, P(i)\Big]\Big\} \Big(1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \times$$

$$\times \frac{(-\lambda)^n}{n!}\, \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=k+1}^{n+k-1} h_{i,\,H}(s)\, P(i)\Big)^{-1}, \; m_1 < k \leqslant m_2, \tag{9}$$

где

$$\zeta_k(s) = \prod_{i=k+1}^{m_1} h_i(s) \overset{k-m_1-1}{h}(s), \; Q_{k,\,H}(s) = \prod_{i=k+1}^{n+k-1} h_i(s) - h^n(s)\, \zeta_k(s), \tag{10}$$

функция $h(s)$ определяется как решение уравнения (1).

Доказательство. Вычислим $h_k(s) = \mathrm{M}\, e^{-s\xi}$, где $\xi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{\alpha} \xi_i$ — длительность k-периода первого типа:

$$\mathrm{M}(e^{-s\xi}) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \mathrm{M}(e^{-s\xi}/\xi_0 = y,\; \alpha = n)\, P(\alpha = n,\; \xi_0 = y)\, dB_1(y) =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-y(s+\lambda)}\, \mathrm{M}\big(e^{-s\sum_{i=1}^n \xi_i}\big)\, dB_1(y). \tag{11}$$

Пусть $m_1 < k \leqslant m_2$. В этом случае длительность k-периода первого типа складывается из: 1) времени обслуживания вызова, начавшего k-период при условии, что система функционирует в первом режиме; 2) времени n независимых i-периодов ($i = \overline{k,\, k+n-1}$) второго типа, если $n+k-1 > m_2$, или времени одного $(n+k-1)$-периода первого типа и $(n-1)$ i-периодов ($i = \overline{k,\, k+n-2}$), тип которых зависит от того, произошло ли переключение режима обслуживания в предыдущих периодах (случай $0 \leqslant n \leqslant m_2 - k+1$). Таким образом, из (11) получаем:

$$h_k(s) = \beta_1(s+\lambda) + \int_0^\infty e^{-y(s+\lambda)} \Big[\sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(\lambda y)^n}{n!} \mathrm{M}\big(e^{-s\sum_{i=1}^n \xi_i}\big) + \sum_{n=m_2-k+2}^\infty \frac{(\lambda y)^n}{n!} \times$$

$$\times h^n(s)\Big] dB_1(y) = \beta_1(s + \lambda(1 - h(s))) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \times$$

$$\times \big[\mathrm{M}\big(e^{-s\sum_{i=1}^n \xi_i}\big) - h^n(s)\big]. \tag{12}$$

Для дальнейшего доказательства необходимо вычислить $\mathrm{M}\big(e^{-s\sum_{i=1}^n \xi_i}\big)$ при $1 \leqslant n \leqslant m_2 - k+1$. Пусть $h_{k,\,\text{П}}(s)$ — ПЛС ф. р. k-периода первого типа, в течение которого хотя бы один раз произошло переключение на второй режим, т. е. $h_{k,\,\text{П}}(s) = \mathrm{M}(e^{-s\xi}/\xi > m_2)$. С помощью метода математической индукции нетрудно показать, что

$$\mathrm{M}\big(e^{-s\sum_{i=1}^n \xi_i}\big) = \sum_{j=1}^{n-1} h_{k+j,\,\text{П}}(s)\,(1 - P(k+j))\, h^j(s) \prod_{i=j+1}^{n-1} h_{k+i,\,H}(s)\, P(k+i) +$$

$$+ h_k(s) \prod_{i=1}^{n-1} h_{k+i,\,H}(s)\, P(k+i), \; 1 \leqslant n \leqslant m_2 - k + 1, \; m_1 < k \leqslant m_2. \tag{13}$$

Учитывая, что $h_{k,\,\text{П}}(s)\,(1 - P(k)) = h_k(s) - h_{k,\,\text{П}}(s)\, P(k)$, подставим выражение (13) в формулу (12). Разрешим полученное уравнение относительно $h_k(s)$. После несложных преобразований получаем (9).

Теперь рассмотрим случай $1 \leqslant k \leqslant m_1$. При этом предположении длительность k-периода первого типа состоит из времени обслуживания требования, начавшего k-период при условии, что система функционирует в первом режиме, а также времени n i-периодов $(i=\overline{k, n+k-1})$, если на протяжении обслуживания k-го требования в систему поступило еще n требований. Тип этих периодов зависит от величины n. Если $0 \leqslant n \leqslant m_1-k+1$, имеем n i-периодов первого типа. В случае $m_1-k+1 < n \leqslant m_2-k+1$ поступившие требования порождают один $(n+k-1)$-период первого типа, $(n+k-2-m_1)$ i-периодов $(i=\overline{m_1+1, n+k-2})$, тип которых зависит от того, произошло ли переключение режима обслуживания в предыдущих периодах и (m_1-k+1) i-периодов $(i=\overline{k, m_1})$ первого типа. При $n > m_2-k+1$ возникает m_1-k+1 i-периодов $(i=\overline{k, m_1})$ первого типа и $(n-m_1+k-1)$ i-периодов второго типа. Учитывая независимость в совокупности случайных величин ξ_i $i=\overline{1, n}$, при фиксированном n и однозначно определенном типе периода, порожденного каждой ξ_i, из (11) после несложных преобразований получаем (8). Заметим, что в ходе вычислений используется формула, аналогичная (13):

$$M\left(\exp\left\{-s \sum_{i=m_1-k+2}^{n} \xi_i\right\}\right) = \sum_{j=m_1-k+2}^{n-1} h_{k+j,\,\Pi}(s)\,(1-P(k+j))\, h(s)^{k+j-m_1-1} \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{n-1} h_{i+k,\,H}(s)\,P(k+i) + h_{m_1+1}(s) \prod_{i=m_1-k+2}^{n-1} h_{k+i,\,H}(s)\,P(k+i). \quad (14)$$

Следствие. Если $\lambda\beta_2^1 < 1$, то средняя длина периода занятости π^1 определяется из следующих соотношений:

$$\pi^1 = h_1^1, \quad (15)$$

$$h_k^1 = \beta_1^{(1)}(\lambda)\Bigg[-\zeta_k^1(\beta_1(\lambda)-1) + \beta_1^1(1+\lambda h^1) + \sum_{n=1}^{m_1-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\beta_1^{(n)}(\lambda)\,\theta_{k,n}^1 +$$

$$+ \sum_{n=m_1-k+2}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\beta_1^{(n)}(\lambda) \sum_{j=m_1+1}^{n+k-1}(h_j^1-h^1)\prod_{i=j+1}^{n+k-1} P(i)\Bigg]^{-1}, \quad 0<k\leqslant m_1, \quad (16)$$

$$h_k^1 = \Bigg(\beta_1^1(1+\lambda h^1) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\beta_1^{(n)}(\lambda)\Bigg(\sum_{j=k+1}^{n+k-1}(h_j^1-h^1)\prod_{i=j+1}^{n+k-1} P(i) -$$

$$-\lambda h^1 \sum_{i=k+1}^{n+k-1} P(i)\Bigg)\Bigg(1-\sum_{n=1}^{m_2-k+1}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\beta_1^{(n)}(\lambda)\prod_{i=k+1}^{n+k-1} P(i)\Bigg)^{-1}, \quad m_1<k\leqslant m_2, \quad (17)$$

где $h^1 = \beta_2^1/(1-\lambda\beta_2^1)$, $\zeta_k^1 = \sum_{i=k+1}^{m_1} h_i^1 - (k-m_1-1)\,h^1$,

$$\Theta_{k,n}^1 = \sum_{i=m_1+1}^{n+k-1} h_i^1 - (n+k-m_1-1)\,h^1.$$

Список литературы

1. Дудин А. Н., Халаф Ихсан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 35.

2. Гнеденко Б. В. и др. Приоритетные системы обслуживания. М., 1973.

Поступила в редакцию 04.09.89.