

$$0 \leq \gamma_4 - \frac{\arg g_1(-1)}{2\pi} < 1,$$

$$0 \leq \gamma_5 + \frac{\arg g_3(i)}{2\pi} < 1.$$

Обозначим $\alpha_1 = \max(\gamma_1, \gamma_5)$, $\alpha_2 = \gamma_3$, $\alpha_3 = \max(\gamma_2, \gamma_4)$. Тогда матрица

$$X(z) = \begin{pmatrix} \exp \tilde{\varphi}_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \exp \tilde{\varphi}_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & \exp \tilde{\varphi}_3(z) \end{pmatrix} (z-1)^{\alpha_1} z^{\alpha_2} (z+1)^{\alpha_3} \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 - 3z\omega_1 \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 - 3z\omega_2 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 - 3z\omega_3 \end{pmatrix}$$

будет канонической матрицей однородной задачи (15), частные индексы ее будут вычисляться по формуле (13).

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 6. С. 32.
2. Чеботарев Н. И. Теория алгебраических функций. М., 1947.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 30.12.88.

УДК 519.21

П. М. ЛАППО

ОБНАРУЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ РАЗЛАДОВ В НЕКОТОРЫХ БИНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Задачи обнаружения разладов в случайных последовательностях различной структуры исследовались многими авторами. Наиболее полный обзор материала содержится в работе [1]. В настоящей заметке рассматривается задача обнаружения многократных разладов в бинарных последовательностях. По методам исследования работа близка к статьям [2—3].

Постановка задачи. Введем понятие альтернирующей последовательности случайных величин (АПСВ). Будем называть АПСВ такую последовательность случайных величин $\{\Theta_j, j=1, 2, \dots\}$, которая обладает следующими свойствами: $\{\Theta_j\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем элементы с нечетными номерами имеют распределение $G_1(x)$, а элементы с четными номерами — $G_2(x)$. Положим $\bar{i}=1$, если $i=2$, и $\bar{i}=2$, если $i=1$. Будем предполагать, что с вероятностью $1 - \frac{g_i}{g_1 + g_2}$, $0 < g_i < 1$, $i=1, 2$, $G_i(x)$ является геометрическим распределением с параметром g_i . При этом условии $P(\Theta_{2j+1}=k) = g_i(1-g_i)^{k-1}$, а распределение $G_2(x)$ является геометрическим с параметром $g_{\bar{i}}$ и $P(\Theta_{2j}=k) = g_{\bar{i}}(1-g_{\bar{i}})^{k-1}$; $k=1, 2, \dots$; $j=1, 2, \dots$. Введем случайные величины

$\tau_m = 1 + \sum_{j=1}^m \Theta_j$; $m=1, 2, \dots$, которые будем называть моментами разладки.

Определим теперь случайную бинарную последовательность $\{x_t, t=1, 2, \dots\}$ со следующим свойством. Если $t \in \left[\sum_{j=1}^{m-1} \Theta_j, \sum_{j=1}^m \Theta_j \right]$, то x_t являются независимыми бернуллиевскими случайными величинами с параметрами $p_i = P(x_t=1) = 1 - P(x_t=0)$, где индекс i совпадает с индексом распределения случайной величины Θ_m , $i \in \{1, 2\}$.

Будем говорить, что АПСВ в момент времени t находится в состоянии $d_t \in \{1, 2\}$, если случайная величина x_t имеет бернуллиевское распределение с параметром p_{d_t} . Требуется по выборке $X_1^N = (x_1, \dots, x_N)$ оценить

моменты разладки таким образом, чтобы минимизировать средний суммарный штраф:

$$M\{c\} = M\left\{\sum_{i=1}^N c_{ij}(t)\right\}, \quad (1)$$

где $c_{ij}(t)$ — величина штрафа, который мы платим, если в момент времени t относим АПСВ в состояние j , а она находится в состоянии i ; $i, j \in \{1, 2\}$.

1. Случай известных параметров.

Теорема. Если параметры $p_i, g_i, i=1, 2$ известны, то оценки моментов разладки τ_k , минимизирующие (1), задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\tau_1 = \min_{t \geq 1} \{t: \delta_{\hat{d}_{t-1} \hat{d}_t} \neq 0\}, \quad \tau_k = \min_{t \geq \tau_{k-1}} \{t: \delta_{\hat{d}_{t-1} \hat{d}_t} \neq 0\},$$

где оценки состояний АПСВ $\hat{d}_t$ имеют вид:

$$\hat{d}_t = \begin{cases} 1, & \text{если } c_{11}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{21}(t)P(d_t = 2/X_1^N) < \\ & < c_{12}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{22}(t)P(d_t = 2/X_1^N), \\ 2 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Вероятности $P(d_t = i/X_1^N)$ вычисляются по приводимым ниже формулам (4) — (6); δ_{ij} — символ Кронекера.

Доказательство. Заметим, что сумма минимальна, если каждое слагаемое минимально. Поэтому задача минимизации (1) состоит в том, чтобы минимизировать по j $M\{c_{ij}(t)\}$ для каждого $t \in \{1, 2, \dots, N\}$. Но

$$M\{c_{ij}(t)\} = \sum_{x_1, \dots, x_N=0}^1 P(X_1^N) (c_{1j}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{2j}(t)P(d_t = 2/X_1^N)). \quad (3)$$

Сумма в правой части (3) будет минимальной, если мы минимизируем по j выражение

$$c_{1j}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{2j}(t)P(d_t = 2/X_1^N).$$

Таким образом, оценка состояния АПСВ в момент t имеет вид (2).

Получим формулы для вычисления $P(d_t = i/X_1^N)$. Так как распределения элементов АПСВ геометрические, то последовательность состояний $d_1, d_2, \dots$ образует цепь Маркова с матрицей вероятностей одношаговых переходов (b_{ij}) , где $b_{ii} = 1 - g_i$, а $b_{ij} = g_i, i \neq j, i, j = 1, 2$, и начальным распределением $P(d_1 = i) = 1 - \frac{g_i}{g_1 + g_2}$. Тогда

$$P(d_t = i/X_1^N) = \frac{P(d_t = i, X_1^N)}{P(X_1^N)} = \frac{P(X_{t+1}^N/d_t = i)P(d_t = i/X_1^t)}{P(X_1^t)}, \quad (4)$$

где мы положили $X_1^{t_2} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_2})$, $t_1 \leq t_2$. Для $P(d_t = i, X_1^t)$ справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} P(d_1 = i, X_1^1) &= \left(1 - \frac{g_i}{g_1 + g_2}\right) p_i^{x_1} (1 - p_i)^{1-x_1}, \quad i = 1, 2; \\ P(d_t = i, X_1^t) &= p_i^{x_t} (1 - p_i)^{1-x_t} (P(d_{t-1} = i, X_1^{t-1}) (1 - g_i) + \\ &\quad + P(d_{t-1} = \bar{i}, X_1^{t-1}) g_i), \quad 2 \leq t \leq N, \quad i = 1, 2; \\ P(X_1^t) &= P(d_t = 1, X_1^t) + P(d_t = 2, X_1^t), \quad 1 \leq t \leq N. \end{aligned} \quad (5)$$

По формулам (4) осуществляют так называемый «прямой ход». Вероятности $P(X_{t+1}^N/d_t = i)$ находят с помощью «обратного хода»:

$$P(X_{N/d_{N-1}}^N = i) = p_i^{x_N} (1 - p_i)^{1-x_N} (1 - g_i) + p_{\bar{i}}^{x_N} (1 - p_{\bar{i}})^{1-x_N} g_i,$$

$$P(X_{N-t+1/d_{N-t}}^N = i) = p_i^{x_{N-t+1}} (1 - p_i)^{1-x_{N-t+1}} (1 - g_i) \times \quad (6)$$

$$\times P(X_{N-t+2/d_{N-t+1}}^N = i) + p_{\bar{i}}^{x_{N-t+1}} (1 - p_{\bar{i}})^{1-x_{N-t+1}} P(X_{N-t+2/d_{N-t+1}}^N = \bar{i}) \times \\ \times g_{\bar{i}}, \quad 2 \leq t \leq N - 1.$$

Формулы (5) и (6) позволяют вычислить вероятности (4). Теорема доказана.

2. Случай неизвестных параметров. Если параметры неизвестны, то предлагается вначале найти их оценки по методу максимального правдоподобия, а затем использовать их для оценки моментов разладки в формулах (4) — (6). Однако получение аналитических выражений для оценок максимального правдоподобия затруднительно в связи с громоздким видом функции правдоподобия $P(X_1^N)$. Поэтому будем решать задачу оценивания параметров численно. Для этого пригодны прямые методы поиска экстремума функции. Функция правдоподобия $P(X_1^N)$ в любой точке вычисляется по формулам (5).

3. Экспериментальное исследование. Проверка работоспособности предложенного алгоритма оценивания моментов разладки осуществлялась на модельных реализациях бинарных последовательностей. Результаты, полученные с помощью ЭВМ, показывают, что алгоритм работает удовлетворительно при $0 \leq p_1 \leq 0,3$; $0,7 \leq p_2 \leq 1$; $0 \leq g_i \leq 0,25$; $c_{ij}(t) = 1 - \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $50 \leq N \leq 1000$. При этом предполагалось, что параметры p_1 , p_2 , g_1 , g_2 неизвестны. Относительный штраф, равный отношению числа неверно определенных состояний АПСВ к объему выборки N , не превышал 0,15.

Список литературы

1. Клигене Н., Телькснис Л. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 5.
2. Харин Ю. С. // Статистические проблемы управления. 1984. Вып. 65. С. 225.
3. Моттль В. В., Мучник И. Б., Яковлев В. Г. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 84.

Поступила в редакцию 24.04.89.

УДК 519.872

Н. В. ЛУНЕВА

О ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ $M/G/1$ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ УПРАВЛЕНИЯ

Имеется однолинейная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием, в которую поступает простейший поток требований интенсивности $\lambda > 0$. Прибор может работать в двух режимах. При работе в l -ом режиме время обслуживания требования имеет функцию распределения (ф. р.) $B_l(t)$ ($l = 1, 2$). Предполагается, что $\beta_2^1 < \lambda^{-1}$, где $\beta_l^1 =$

$$= \int_0^\infty (1 - B_l(t)) dt. \quad \text{Изменение режима работы может происходить в мо-}$$

мент окончания обслуживания очередного требования. Фиксируются натуральные числа m_1 и m_2 , называемые порогами, $0 \leq m_1 \leq m_2 < +\infty$. Если число i требований в системе в момент окончания обслуживания удовлетворяет неравенству $i \leq m_1$, следующее требование может обслужиться только в первом режиме. Если $i > m_2$, обслуживание осуществляется во