Теорема 3. Центр окружности плоскости Лобачевского H_2, изображаемой окружностью (2) евклидовой плоскости E_2, совпадает с центром окружности пучка (8), соответствующей тому из корней λ уравнения (9), модуль которого меньше 1.

Теорема 4. База эквидистанты плоскости Лобачевского H_2, изображаемой окружностью (2) евклидовой плоскости E_2, совпадает с прямой линией плоскости H_2, которая в евклидовой плоскости E_2 изображается окружностью (10).

Список литературы

1. Schwerdtfeger G. Geometry of complex numbers. New York, 1979.
2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., 1966.
3. Доличанин Ч. // Математички радови. Приштина, 1988. С. 147.

Поступила в редакцию 15.05.89

УДК 517.544

Н. В. БРОВКА, Л. П. ПРИМАЧУК

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОДСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ

Пусть $L = \bigcup\limits_{\nu=1}^{m} L_\nu$, $L_\nu = \overset{\frown}{a_0 a_\nu}$ — простые, гладкие, ориентированные кривые, не имеющие других общих точек, кроме a_0, $D = \mathbb{C} \setminus L$, (σ_ν), $\nu = \overline{1, m}$ — совокупность отличных от единичной подстановок, таких, что σ_ν, $\nu = \overline{1, m}$ не коммутируют между собой, группа, ими порожденная, действует транзитивно, и взятое в надлежащем порядке произведение $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_m = e$.

Рассмотрим задачу: найти кусочно-голоморфный вектор $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z))$ по следующему краевому условию:

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + g(t), \ t \in L, \tag{1}$$

где $G(t)$ — подстановочная матрица следующего вида:

$$G(t) = \begin{pmatrix} f_{1\nu}(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{n\nu}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1,i\nu_1} & \ldots & \delta_{n,i\nu_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \delta_{1,i\nu_n} & \ldots & \delta_{n,i\nu_n} \end{pmatrix} = (f_\nu)(\sigma_\nu), \ \ t \in L_\nu, \ \ \nu = \overline{1, m},$$

$f_{i\nu}(t)$ — гёльдеровские, не обращающиеся в 0, имеющие конечные односторонние пределы при $t \to a_i$, $i = \overline{0, m}$ функции; $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, $\mu = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{1, m}$; $g(t)$ — H-непрерывный n-мерный вектор-столбец. Задачу будем решать в классе ограниченных функций.

Если $f_{i\nu}(t) \equiv 1$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{1, m}$, то решение задачи (1) эквивалентно построению основных функционалов римановой поверхности $\boldsymbol{R}$, заданной в виде n-листной поверхности наложения расширенной комплексной плоскости $\widehat{\boldsymbol{C}}$. При этом точки a_i, $i = \overline{1, m}$ — точки ветвления данного накрытия, а подстановки σ_ν описывают закон склеивания листов данного накрытия в окрестностях точек a_ν [1]. Пусть $\lambda_{1_1}, \ldots, \lambda_{\nu k_\nu}$-кратности циклов, на которые распадается подстановка σ_ν. Четное число $\omega_z = \sum\limits_{\nu=1}^{m} \sum\limits_{\mu=1}^{k_\nu} \times (\lambda_{\mu\nu} - 1)$ равно индексу разветвления поверхности $\boldsymbol{R}$, а ее род ρ вычисляется по формуле Римана — Гурвица [2]: $\rho = \frac{\omega_z}{2} - n + 1$. В дальнейшем будем предполагать, что $\rho = 0$. В работе [1] показано, что в этом случае существует решение однородной задачи (1), удовлетворяющее при $z \to \infty$ следующим условиям:

$$\omega_1(z) = c_1 z + O(1), \ c_1 \neq 0; \ \omega_2(z) = O(1); \ \ldots, \ \omega_n(z) = O(1). \tag{2}$$

Утверждение 1. Каноническая матрица $\chi(z)$ однородной задачи (1) при $f_{i\nu}(t) \equiv 1$ в классе ограниченных функций дается формулой:

$$\chi(z) = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 z & -e_2 z & \dots & -e_{n-2} z \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -c_1 z \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где постоянные $c_1, \dots, e_{n-2}$ определяются формулами:

$$\begin{gathered} \omega_1(z) = c_1 z + O(1) := c_1 z + \omega_{11}(z) \\ \omega_1(z)\omega_{11}(z) = c_2 z + O(1) := c_2 z + \omega_{12}(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_1(z)\omega_{1n-3}(z) = c_{n-2} z + O(1) := c_{n-2} z + O(1). \end{gathered} \tag{4}$$

Частные индексы равны соответственно: $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = \varkappa_3 = \dots = \varkappa_n = -1$.

Доказательство следует из того, что матрица (3) удовлетворяет краевому условию и сумма порядков столбцов на бесконечности равна порядку определителя.

Пусть

$$(x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z)) \tag{5}$$

некоторое фиксированное решение задачи (1) при $g(t) \equiv 0$. Из общей теории задачи Римана следует, что каноническая матрица однородной задачи (1) необходимо будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(z) & & 0 \\ & x_2(z) & \\ & & \ddots \\ 0 & & x_n(z) \end{pmatrix} \chi(z) R(z), \tag{6}$$

где $R(z)$ — некоторая рациональная матрица.

Таким образом, задача сводится к построению фиксированного решения (5) и матрицы $R(z)$. Для построения решения (5) рассмотрим вспомогательную неоднородную задачу:

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}^+(t) = (\sigma_\nu)\, \tilde{\varphi}^-(t) + \ln f_\nu(t), \quad t \in L_\nu, \quad \nu = \overline{1, m}, \\ \ln f_\nu(t) = (\ln f_{1\nu}(t), \dots, \ln f_{n\nu}(t)). \end{gathered} \tag{7}$$

Ограниченное на бесконечности частное решение этой задачи дается в виде [3]:

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{L_1} [\chi^+(t)]^{-1} \ln f(t) \frac{dt}{t-z}. \tag{8}$$

Здесь каждая компонента вектора-решения $\tilde{\varphi}(z)$ выражается формулой:

$$\begin{gathered} \varphi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(t)\,dt}{t-z} + \frac{\omega_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(t)\,dt}{t-z} + \dots + \\ + \frac{\omega_j^{n-1}(z) - c_1 z\,\omega_j^{n-2}(z) - \dots - c_{n-2} z\,\omega_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_n(t)\,dt}{t-z}, \end{gathered} \tag{9}$$

где $(F_1, F_2, \dots, F_n) = [\chi^+]^{-1} (\ln f_1, \ln f_2, \dots, \ln f_n)$.

Из свойств интеграла типа Коши и существования односторонних пределов у функций $f_{i\nu}(t)$ при $t \to a_k$ следует, что $\tilde{\varphi}_j(z)$ в окрестности точки a_k, $k = \overline{0, m}$ имеет следующее представление [3]:

$$\tilde{\varphi}_j(z) = \frac{r_{kj}}{2\pi i} \ln(z - a_k) + \Phi_{kj}(z), \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, m},$$

$\Phi_{kj}(z)$ — ограниченные функции; r_{kj} — некоторые константы из C.

Замечание. Для практического нахождения констант r_{kj} необходимо знать разложения функций $\omega_j(z)$ в окрестности каждой точки a_k.

Выберем целые числа γ_{kj} из условий:

$$0 \leqslant \gamma_{kj} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} r_{kj} < 1, \ j = \overline{1, n}, \ k = \overline{0, m}. \tag{10}$$

Обозначим $\alpha_k = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \gamma_{kj}, \ k = \overline{0, m}.$

Тогда вектор $(X_1(z), \dots, X_n(z))$, задаваемый формулой

$$X_j(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - a_k)^{\alpha_k} \exp \varphi_j(z), \ j = \overline{1, n}, \tag{11}$$

является решением однородной задачи (1) в классе ограниченных функций. Матрица

$$X(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - a_k)^{\alpha_k} \begin{pmatrix} \exp \tilde{\varphi}_1(z) & & 0 \\ & \exp \tilde{\varphi}_2(z) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \exp \tilde{\varphi}_n(z) \end{pmatrix} \chi(z), \tag{12}$$

где $\chi(z)$ определяется формулой (3), является искомой канонической матрицей. Доказано следующее

Утверждение 2. Матрица $X(z)$, определяемая формулой (12), является канонической матрицей решений однородной задачи (1). Ее частные индексы равны соответственно:

$$\varkappa_1 = -\sum_{k=0}^{m} \alpha_k, \ \varkappa_2 = \varkappa_3 = \dots = \varkappa_n = -\sum_{k=0}^{m} \alpha_k - 1. \tag{13}$$

Замечание. Изменяя обычным образом выбор постоянных γ_{kj} в неравенствах (10), можно получить решение задачи (1) в других классах Н. И. Мусхелишвили [3].

Если $\varkappa_1 = 0, \ \varkappa_i < 0, \ i = \overline{2, n}$, для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_L Q(t) \, [X^+(t)]^{-1} g(t) \, dt = 0, \tag{14}$$

где $Q(t) = (0, t, \dots, t)$.

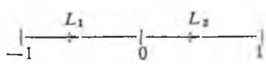
Если $\varkappa_i < 0, \ i = \overline{1, n}$, задача (1) разрешима при выполнении условий (14), где $Q = (Q_{-\varkappa_1 - 1}, Q_{-\varkappa_2 - 1}, \dots, Q_{-\varkappa_n - 1})$.

При $\varkappa_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n}$ задача (1) безусловно разрешима. Во всех случаях ее решение задается формулой

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L [X^+(t)]^{-1} \, g(t) \frac{dt}{t - z} + P(z) X(z),$$

где матрица $X(z)$ определяется формулой (12); $P(z)$ — полиномиальный вектор $P(z) = (P_{\varkappa_1 - 1}(z), \dots, P_{\varkappa_n - 1}(z))$, причем $P_{\varkappa_j - 1} \equiv 0$ при $\varkappa_j \leqslant 0$.
Рассмотрим пример. Пусть $n = 3$. Матрица $G(t)$ имеет вид:

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(t) \\ 0 & f_3(t) & 0 \end{pmatrix}, & -1 < t < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & f_1(t) & 0 \\ f_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3(t) \end{pmatrix}, & 0 < t < 1, \end{cases} \tag{15}$$

контур L изображен следующим образом: 

Для случая, когда $f_i(t)\equiv 1$, $i=\overline{1, 3}$, каноническая матрица однородной задачи имеет вид [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_1(z) & \omega_1^2(z)-3z\omega_1(z) \\ 1 & \omega_2(z) & \omega_2^2(z)-3z\omega_2(z) \\ 1 & \omega_3(z) & \omega_3^2(z)-3z\omega_2(z) \end{pmatrix},$$

где $\omega_i(z)$ — ветви решений уравнения $\omega^3-3z\omega^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}z\omega-\frac{z}{2}=0$, удовлетворяющие условиям: $\omega_1(\infty)=\infty$, $\omega_2(\infty)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\omega_3(\infty)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Фиксированное решение задачи (7) возьмем в виде $\tilde{\varphi}(z)=(\tilde{\varphi}_1(z), \tilde{\varphi}_2(z), \tilde{\varphi}_2(z))$, где

$$\tilde{\varphi}_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{F_1(t)\,dt}{t-z}+\frac{\omega_j(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{F_2(t)\,dt}{t-z}+\frac{\omega_j^2(z)-3z\omega_j(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{F_3(t)\,dt}{t-z},\; j=\overline{1, 3},$$

$$F_1=\frac{\omega_2\omega_3(\omega_3-\omega_2)\ln f_1-\omega_1\omega_3(\omega_3-\omega_1)\ln f_2+\omega_1\omega_2(\omega_2-\omega_1)\ln f_3}{(\omega_3-\omega_1)(\omega_3-\omega_2)(\omega_2-\omega_1)},$$

$$F_2=\frac{[\omega_2^2-\omega_3^2+3t(\omega_3-\omega_2)]\ln f_1+[\omega_3^2-\omega_1^2-3t(\omega_3-\omega_1)]\ln f_2+[\omega_1^2-\omega_3^2+3t(\omega_3-\omega_1)]\ln f_3}{(\omega_3-\omega_1)(\omega_3-\omega_2)(\omega_2-\omega_1)}$$

$$F_3=\frac{(\omega_3-\omega_2)\ln f_1+(\omega_1-\omega_3)\ln f_2+(\omega_2-\omega_1)\ln f_3}{(\omega_3-\omega_1)(\omega_3-\omega_2)(\omega_2-\omega_1)}.$$

Используя разложение функций $\omega_i(z)$ в окрестностях точек $z=-1, 0, 1$, получим следующие выражения:

$$r_{0_j}=c^j_{01}\ln f_1(\pm 0)+c^j_{02}\ln f_2(\pm 0)+c^j_{03}\ln f_3(\pm 0),$$

$$r_{1_j}=c^j_{1_1}\ln f_1(1^-)+c^j_{1_2}\ln f_2(1^-)+c^j_{1_3}\ln f_3(1^-),$$

$$r_{-1_j}=c^j_{-1_1}\ln f_1(-1^+)+c^j_{-1_2}\ln f_2(-1^+)+c^j_{-1_3}\ln f_3(-1^+),$$

где коэффициенты $c^j_{i_k}$ задаются таблицей.

$j=\overline{1,3}$	Коэффициенты при $\ln f_k(z)$		
$\tilde{\varphi}_1(z)$	1/2	1	1/3
	1/2	0	1/3
	0	0	1/3
$\tilde{\varphi}_2(z)$	1/2	0	1/3
	1/2	1/2	1/3
	0	1/2	1/3
$\tilde{\varphi}_3(z)$	0	0	1/3
	0	1/2	1/3
	1	1/2	1/3

Целые числа γ_i, $i=\overline{1, 5}$ выбираем из условий:

$$0\leqslant\gamma_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\arg g_1(1)+\arg g_2(1)}{2\pi}<1,$$

$$0\leqslant\gamma_2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\arg g_2(-1)+\arg g_3(-1)}{2\pi}<1,$$

$$0\leqslant\gamma_3+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\arg g_i(+0)-\arg g_i(-0)}{2\pi}<1,$$

$$0 \leqslant \gamma_4 - \frac{\arg g_1(-1)}{2\pi} < 1,$$

$$0 \leqslant \gamma_5 + \frac{\arg g_3(1)}{2\pi} < 1.$$

Обозначим $\alpha_1 = \max(\gamma_1, \gamma_5)$, $\alpha_2 = \gamma_3$, $\alpha_3 = \max(\gamma_2, \gamma_4)$. Тогда матрица

$$X(z) = \begin{pmatrix} \exp\tilde{\varphi}_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \exp\tilde{\varphi}_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & \exp\tilde{\varphi}_3(z) \end{pmatrix} (z-1)^{\alpha_1} z^{\alpha_2} (z+1)^{\alpha_3} \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 - 3z\omega_1 \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 - 3z\omega_2 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 - 3z\omega_3 \end{pmatrix}$$

будет канонической матрицей однородной задачи (15), частные индексы ее будут вычисляться по формуле (13).

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 6. С. 32.
2. Чеботарев Н. И. Теория алгебраических функций. М., 1947.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 30.12.88.

УДК 519.21

П. М. ЛАППО

ОБНАРУЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ РАЗЛАДОК В НЕКОТОРЫХ БИНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Задачи обнаружения разладок в случайных последовательностях различной структуры исследовались многими авторами. Наиболее полный обзор материала содержится в работе [1]. В настоящей заметке рассматривается задача обнаружения многократных разладок в бинарных последовательностях. По методам исследования работа близка к статьям [2—3].

Постановка задачи. Введем понятие альтернирующей последовательности случайных величин (АПСВ). Будем называть АПСВ такую последовательность случайных величин $\{\Theta_j, j=1, 2...\}$, которая обладает следующими свойствами: $\{\Theta_j\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем элементы с нечетными номерами имеют распределение $G_1(x)$, а элементы с четными номерами — $G_2(x)$. Положим $\bar{i}=1$, если $i=2$, и $\bar{i}=2$, если $i=1$. Будем предполагать, что с вероятностью $1-\frac{g_i}{g_1+g_2}$, $0<g_i<1$, $i=1, 2$, $G_1(x)$ является геометрическим распределением с параметром g_i. При этом условии $P(\Theta_{2j+1}=k)=g_i(1-g_i)^{k-1}$, а распределение $G_2(x)$ является геометрическим с параметром $g_{\bar{i}}$ и $P(\Theta_{2j}=k) = g_{\bar{i}}(1-g_{\bar{i}})^{k-1}_{\bar{i}}$; $k=1, 2, \ldots$; $j=1, 2, \ldots$. Введем случайные величины $\tau_m = 1 + \sum_{j=1}^{m} \theta_j$; $m=1, 2, \ldots$, которые будем называть моментами разладки.

Определим теперь случайную бинарную последовательность $\{x_t, t = 1, 2, \ldots\}$ со следующим свойством. Если $t \in \left[\sum_{j=1}^{m-1} \theta_j, \sum_{j=1}^{m} \theta_j\right]$, то x_t являются независимыми бернуллиевскими случайными величинами с параметрами $p_i = P(x_t=1) = 1-P(x_t=0)$, где индекс i совпадает с индексом распределения случайной величины Θ_m, $i\in\{1, 2\}$.

Будем говорить, что АПСВ в момент времени t находится в состоянии $d_t \in \{1, 2\}$, если случайная величина x_t имеет бернуллиевское распределение с параметром p_{d_t}. Требуется по выборке $X_1^N = (x_1, \ldots, x_N)$ оценить