б. Для всех x и y из шара $B(x_0, R)$ выполняются неравенства:

$$\frac{|\alpha|}{|f'_{it_i}(Z_i(x_0, x_0))|} \leqslant b,$$

$$\frac{1}{|\alpha|}|f'_{it_i}(Z_i(x, y)) - f'_{it_i}(Z_i(y, y))| \leqslant \omega(\|x-y\|),$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}(f_i(Z_i(x, x)) - f_i(Z_i(x, y)) + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(f_i(Z_i(x, x)) - f_i(Z_i \times \right.$$
$$\left. \times (x, y)))\right| \leqslant \frac{1}{b}\varphi(\|x-y\|).$$

в. Уравнение (7) имеет решение и r_* — наименьший положительный корень (7).

г. $a < r_*$ и $W(a) \leqslant R$.

Тогда уравнение (16) имеет в шаре $B(x_0, R)$ решение (t_i^*), единственное в D. Кроме того, итерационный процесс (17) сходится к этому решению и верны оценки $|t_i^* - t_i^{(n)}| \leqslant (W\,\Omega^{(n)}(a))$.

Доказательство этой теоремы сразу следует из теоремы 1 и того факта, что

$$(\Phi'_x(x, y))_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} f'_{it_i}(Z_i(x, y)), & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

$$([\Phi'_x(x, x)]^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha}{f'_{it_i}(Z_i(x, x))}, & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Список литературы

1. Канторович Л. В. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 1. С. 17.
2. Мысовских И. П. // Вестн. Ленинград. ун-та. 1953. № 11. С. 25.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
4. Шилов Г. Е. Дифференцирование функций: Высшие производные и вариационное исчисление. Ярославль, 1980. С. 65.

Поступила в редакцию 17.03.89

УДК 515.16

Ч. ДОЛИЧАНИН (СФРЮ), П. П. ЗАБРЕЙКО

МАТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЦИКЛОВ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В работах [1—3] окружности евклидовой плоскости представлялись комплексными матрицами второго порядка. В настоящей статье получены аналогичные представления для циклов плоскости Лобачевского.

1. Матричное представление циклов. Для получения матричных представлений циклов (т. е. окружностей, эквидистант и орициклов) плоскости Лобачевского H_2 рассмотрим интерпретацию Пуанкаре плоскости Лобачевского H_2 на евклидовой плоскости E_2, при которой абсолют плоскости H_2 изображается единичной окружностью

$$z\bar{z} = 1. \tag{1}$$

В этой интерпретации окружности плоскости H_2 изображаются окружностями, целиком лежащими внутри круга, ограниченного окружностью (1), орициклы — окружностями, лежащими внутри этого круга и касающимися окружности (1), а две дуги эквидистанты изображаются той дугой окружности, пересекающейся с окружностью (1), которая находится внутри круга, ограниченного этой окружностью, и той дугой, которая получается из второй дуги окружности, лежащей вне круга, ограниченного окружностью (1), при помощи инверсии относительно окружности (1); при этом прямые плоскости H_2 изображаются дугами окружностей, ортогональными к окружности (1), а углы между циклами — в натуральную величину.

Теорема 1. Угол между двумя циклами, изображающимися окружностями,

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0, \tag{2}$$

$$A'z\bar{z} + B'\bar{z} + \bar{B}'z + C' = 0, \tag{3}$$

равный углу между этими окружностями, определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{sp}(MM')}{2\sqrt{\det(MM')}}, \tag{4}$$

где $M = \begin{pmatrix} -\bar{B} & -A \\ C & B \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} -\bar{B}' & -A' \\ C' & B' \end{pmatrix}$.

Условие, что цикл, изображаемый окружностью (2), является прямой плоскости H_2, имеет вид

$$A = C. \tag{5}$$

Действительно, прямые плоскости H_2 изображаются на плоскости E_2 окружностями, ортогональными окружности (1), а условие ортогональности окружностей (1) и (2) в плоскости E_2 имеет вид $\cos\varphi = 0$, где φ — угол между этими окружностями. Так как для окружности (1) $A = -C = 1$, $B = 0$, то в силу (4) это условие может быть записано в виде $\operatorname{sp}(MM') = C - A = 0$, что совпадает с (5).

2. Изображения окружностей, орициклов и эквидистант.

Теорема 2. Цикл плоскости H_2, изображаемый окружностью (2) плоскости E_2, является соответственно окружностью, орициклом или эквидистантой плоскости H_2 в том и только в том случае, когда справедливо соответствующее из приведенных ниже неравенств:

$$\left|\frac{C-A}{2\sqrt{B\bar{B}-AC}}\right| > 1, \quad \left|\frac{C-A}{2\sqrt{B\bar{B}-AC}}\right| = 1, \quad \left|\frac{C-A}{2\sqrt{B\bar{B}-AC}}\right| < 1. \tag{6}$$

В самом деле, эти условия состоят в том, что угол φ между окружностью (2), изображающей этот цикл, и окружностью (1) удовлетворяет соответственно условиям

$$|\cos\varphi| > 1, \quad |\cos\varphi| = 1, \quad |\cos\varphi| < 1. \tag{7}$$

3. Центр окружности и база эквидистантности. Для того, чтобы найти центр окружности или базу эквидистанты, изображаемых окружностью (2), следует рассмотреть пучок окружностей, определяемый окружностями (1) и (2). Тогда центр окружности будет окружностью эллиптического пучка, определяемого окружностями (1) и (2), являющейся точкой, находящейся внутри круга, ограниченного окружностью (1), а база эквидистанты будет окружностью гиперболического пучка окружностей, определяемого окружностями (1) и (2), являющейся прямой линией.

Пучок окружностей, определяемый окружностями (1) и (2), имеет вид:

$$(A + \lambda)z\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + (C - \lambda) = 0. \tag{8}$$

Радиус окружности (8) равен нулю в том и только в том случае, когда параметр λ является корнем уравнения

$$\lambda^2 + (A - C)\lambda + (B\bar{B} - AC) = 0. \tag{9}$$

Аналогично, окружность (8) является прямой в плоскости H_2 в том и только в том случае, когда $\lambda = \frac{A-C}{2}$, т. е. эта окружность задается уравнением

$$\frac{A+C}{2}z\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + \frac{A+C}{2} = 0. \tag{10}$$

Теорема 3. Центр окружности плоскости Лобачевского H_2, изображаемой окружностью (2) евклидовой плоскости E_2, совпадает с центром окружности пучка (8), соответствующей тому из корней λ уравнения (9), модуль которого меньше 1.

Теорема 4. База эквидистанты плоскости Лобачевского H_2, изображаемой окружностью (2) евклидовой плоскости E_2, совпадает с прямой линией плоскости H_2, которая в евклидовой плоскости E_2 изображается окружностью (10).

Список литературы

1. Schwerdtfeger G. Geometry of complex numbers. New York, 1979.
2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., 1966.
3. Доличанин Ч. // Математички радови. Приштина, 1988. С. 147.

Поступила в редакцию 15.05.89

УДК 517.544

Н. В. БРОВКА, Л. П. ПРИМАЧУК

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОДСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ

Пусть $L=\bigcup\limits_{\nu=1}^{m} L_\nu$, $L_\nu=\widehat{a_0 a_\nu}$ — простые, гладкие, ориентированные кривые, не имеющие других общих точек, кроме a_0, $D=\mathbb{C}\setminus L$, (σ_ν), $\nu=\overline{1, m}$ — совокупность отличных от единичной подстановок, таких, что σ_ν, $\nu=\overline{1, m}$ не коммутируют между собой, группа, ими порожденная, действует транзитивно, и взятое в надлежащем порядке произведение $\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_m=e$.

Рассмотрим задачу: найти кусочно-голоморфный вектор $\varphi(z)=(\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z))$ по следующему краевому условию:

$$\varphi^+(t)=G(t)\varphi^-(t)+g(t),\ t\in L, \tag{1}$$

где $G(t)$ — подстановочная матрица следующего вида:

$$G(t)=\begin{pmatrix} f_{1\nu}(t) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & f_{n\nu}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{1,i\nu_1} & \ldots & \delta_{n,i\nu_1}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \delta_{1,i\nu_n} & \ldots & \delta_{n,i\nu_n}\end{pmatrix}=(f_\nu)(\sigma_\nu),\ \ t\in L_\nu,\ \ \nu=\overline{1, m},$$

$f_{i\nu}(t)$ — гёльдеровские, не обращающиеся в 0, имеющие конечные односторонние пределы при $t\to a_i$, $i=\overline{0, m}$ функции; $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, $\mu=\overline{1, n}$, $\nu=\overline{1, m}$; $g(t)$ — H-непрерывный n-мерный вектор-столбец. Задачу будем решать в классе ограниченных функций.

Если $f_{i\nu}(t)\equiv 1$, $i=\overline{1, n}$, $\nu=\overline{1, m}$, то решение задачи (1) эквивалентно построению основных функционалов римановой поверхности $\boldsymbol{R}$, заданной в виде n-листной поверхности наложения расширенной комплексной плоскости $\widehat{\boldsymbol{C}}$. При этом точки a_i, $i=\overline{1, m}$ — точки ветвления данного накрытия, а подстановки σ_ν описывают закон склеивания листов данного накрытия в окрестностях точек a_ν [1]. Пусть $\lambda_{1_1}, \ldots, \lambda_{\nu k_\nu}$-кратности циклов, на которые распадается подстановка σ_ν. Четное число $\omega_z=\sum\limits_{\nu=1}^{m}\sum\limits_{\mu=1}^{k_\nu}\times(\lambda_{\mu\nu}-1)$ равно индексу разветвления поверхности $\boldsymbol{R}$, а ее род ρ вычисляется по формуле Римана — Гурвица [2]: $\rho=\frac{\omega_z}{2}-n+1$. В дальнейшем будем предполагать, что $\rho=0$. В работе [1] показано, что в этом случае существует решение однородной задачи (1), удовлетворяющее при $z\to\infty$ следующим условиям:

$$\omega_1(z)=c_1 z+O(1),\ c_1\neq 0;\ \omega_2(z)=O(1);\ \ldots,\ \omega_n(z)=O(1). \tag{2}$$