

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое. Неравенство (10) в этом случае заменяется на

$$|\Delta_u x^0(t)| \leq K_1 \varepsilon^3, \quad K_1 = \text{const}, \quad t \in T. \quad (17)$$

Используя (16), (17), (11) с заменой T на $[\Theta, \Theta + \varepsilon)$, а также теорему 1, можно получить неравенство

$$\Delta I(u^0) = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{\Theta}^{\Theta+\varepsilon} \left(\frac{\partial H^{0'}}{\partial u} [t] \dot{u}^0(t) + \dot{u}^{0'}(t) \frac{\partial^2 H^0 [t]}{\partial u^2} \dot{u}^0(t) \right) \times \\ \times \delta_1(t) dt + o_3(\varepsilon^5) \geq 0. \quad (18)$$

Теорема 2. Если $u^0(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление в задаче (1) — (5), то имеет место неравенство:

$$\frac{\partial H^{0'}}{\partial u} [t] \dot{u}^0(t) + \dot{u}^{0'}(t) \frac{\partial^2 H^0 [t]}{\partial u^2} \dot{u}^0(t) \leq 0, \quad t \in T. \quad (19)$$

Доказательство неравенства (19) нетрудно получить из (18) с использованием теоремы о среднем.

Нетрудно заметить, что условия (15), (19) по своей сути напоминают известные уравнение Эйлера и условие Лежандра соответственно из классического вариационного исчисления [1, 2].

З а м е ч а н и е. Все результаты сохраняются, если в качестве допустимых управлений рассматривать дважды кусочно-дифференцируемые на T -вектор функции.

Следует также сказать, что подобные результаты имелись ранее лишь для обыкновенных линейных управляемых систем [3—5].

Список литературы

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск, 1981.
3. Вельов В. М. // Годишн. ВУЗ. Прилож. мат. 1979 (1980). Т. 15. № 1. С. 83.
4. Гичев Т. Р. Оптимальное управление. 1. София, 1980.
5. Силин Д. Б. // Вестн. МГУ. Вычислит. матем. и кибернетика. 1982. № 3. С. 44.

Поступила в редакцию 12.12.88.

УДК 517.977

ЛЕ ТЬИ ЗУНГ (СРВ)

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

В [1] исследована задача оптимизации динамической системы

$$\dot{x} = A_0 x + a_0 f_1(x) + bu, \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

по функционалу качества

$$I(u) = c'x(t^*) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Там получен опорный принцип максимума и изложена процедура доводки. С целью обобщения результатов на системы, охватывающие более широкий класс физических и технических задач, в данной работе вместо (1), (2) рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u, \quad t \in T, \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

и функционал

$$I(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где $x = x(t)$ — n -вектор состояния; $u = u(t)$ — значение скалярного управления; x_0 — заданный вектор начального состояния.

Допустимым управлением назовем каждую кусочно-непрерывную функцию $u = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in T$, если соответствующее ей решение системы (3) удовлетворяет ограничению

$$g(x(t^*)) = 0. \quad (5)$$

Здесь n — вектор-функция $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$; m — вектор-функция $g(\cdot)$ и скалярная функция $\varphi(\cdot)$ предполагаются непрерывными вместе с их производными до второго порядка.

Математической моделью (3) — (5) описываются, в частности, переходные процессы в ядерном реакторе (см., например, [2], [3]).

1. Опорный принцип максимума. Вдоль допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, и соответствующей ему траектории системы (3) построим сопряженную систему:

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad t \in T, \quad (6)$$

$$\psi(t^*) = G'y - c, \quad (7)$$

$$\text{где } A(t) = \frac{\partial f_1(x(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x(t))}{\partial x} u(t), \quad t \in T,$$

$$G = \frac{\partial g(x(t^*))}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial \varphi'(x(t^*))}{\partial x}.$$

Будем использовать также обозначения $b(t) = f_2(x(t))$, $c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b(t)$, $G(t) = GF(t^*)F^{-1}(t)b(t)$, $t \in T$, где $F = A(t)F$, $t \in T$, $F(0) = E$ — единичная матрица.

Допустим, что $\text{rank } G = m < n$. На отрезке T выделим множество $T_{\text{оп}} = \{t_1, \dots, t_s\}$. Каждой точке $t_k \in T$ поставим в соответствие конечное множество I_k , $k = \overline{1, s}$, с элементами вида p^+ , p^- , p^0 . Включение $p^+ \in I_k$ ($p^- \in I_k$) означает, что в точке t_k рассматривается правая (левая) производная p -го порядка от функции $G(t)$. Запись $p^0 \in I_k$ подразумевает, что $G(t)$ в точке t_k имеет непрерывную производную p -го порядка и эта производная находится в рассмотрении. Положим $I_{\text{оп}} = \{I_1, \dots, I_s\}$.

Совокупность $S_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}\}$ назовем (локальной) опорой ограничений (вдоль $u(t)$, $x(t)$, $t \in T$), матрицу $P = (G^{(p)}(t_k))$, $p \in I_k$, $k = \overline{1, s}$ опорной, если $\text{rank } P = m$ и

$$\text{rank} \left\{ \begin{pmatrix} c(p)'(t_k) \\ G(p)(t_k) \end{pmatrix}, p = \overline{0, j_k}, k = \overline{1, s} \right\} = m, \quad j_k = \max_{I_k} j.$$

Пара $\{u, S\}$ из допустимого управления и опоры ограничений называется опорным управлением. Если $s = m$, $I_i = \{0\}$, $k = \overline{1, m}$ и $|u(t-0) + u(t+0)|/2 < 1$, $t \in T_{\text{оп}}$, то опорное управление называется невырожденным.

Опорному управлению поставим в соответствие решение системы (6) — (7) с m -вектором потенциалов

$$y = (P^{-1})' c_{\text{оп}}, \quad c_{\text{оп}} = (c^{(p)}(t_k)), \quad p \in I_k, \quad k = \overline{1, s}. \quad (8)$$

Как известно, оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, задачи (3) — (5) называют нормальным, если не существует таких чисел $\lambda_0 = 0$ и m -вектора $\lambda \neq 0$, что

$$\psi'(t)b(t)u(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi'(t)b(t)u, \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение системы (6) с условием $\psi(t^*) = \lambda_0 c + G'\lambda$.

Следуя [1], можно доказать следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $\{u, S_{\text{оп}}\}$ — невырожденное опорное управление, $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, — соответствующие траектории систем (3) и (6) — (8), $H(x, \psi, u) = \psi'(f_1(x) + f_2(x)u)$.

Условие максимума

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{|u| \leq 1} H(x(t), \psi(t), u), \quad t \in T \quad (9)$$

является необходимым условием оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$.

Теорема 2. Для нормального оптимального управления $u(t)$, $t \in T$, существует такая локальная опора ограничений $S_{\text{оп}}$, что на опорном управлении $\{u, S_{\text{оп}}\}$ и соответствующих ему решениях $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, прямой (3) и сопряженной (6) — (8) систем выполняется (9).

2. Доводка. Численный пример. Рассмотрим совокупность $T_{\text{оп}}^3 = \{T_i, i \in N\} \subset T$, $T_i = [\tau_i, \tau^1]$, $\tau_i \leq \tau^1 < \tau_{i+1}$, $i \in N = \{1, \dots, p\}$, $\tau^0 = 0$, $\tau_{p+1} = t^*$.

Введем обозначения: $N_* = \{i \in N : \tau_i < \tau^1\}$, $\xi = (\xi_i, i \in K) = (\tau_i, i \in N; \tau^1, i \in N_*)$, $K = \{1, 2, \dots, |N| + |N_*|\}$, $\theta = (\psi_0, \xi)$.

Пусть $x(\theta, t)$, $\psi(\theta, t)$, $t \in T$, — решения систем (3), (6), $\psi(0) = \psi_0$, при управлении $u(t) = \omega(\theta, t)$, $t \in T$, сопровождающем θ ,

$$\omega(\theta, t) = 1 \vee -1, t \in T_{\text{н}} = T \setminus \bigcup T_i,$$

$$\omega(\theta, t) = \psi'(t) R(x(t)) / \psi'(t) S(x(t)), t \in \bigcup_{i \in N_*} T_i.$$

Последняя формула получается из тождеств $\frac{d}{dt} [\psi'(t) b(t)] \equiv 0$, $\frac{d^2}{dt^2} \times [\psi'(t) b(t)] \equiv 0$, $t \in \bigcup_{i \in N_*} T_i$ в предположении $\psi' S(x) > 0$.

Здесь

$$R(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 f_2 + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_1 \right) f_2 - \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} f_1 \right) f_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1,$$

$$S(x) = - \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_2 \right) f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} f_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 f_1 + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_2 \right) f_1.$$

Подсчитаем:

$$\zeta_0(\theta, y) = \psi(\theta, t^*) - \frac{\partial g'(x(\theta, t^*))}{\partial x} y + \frac{\partial \varphi'(x(\theta, t^*))}{\partial x},$$

$$\zeta_*(\theta, y) = g(x(\theta, t^*)), \zeta_j(\theta, y) = \psi'(\theta, \xi_j) b(\xi_j), j \in K.$$

Процедура доводки заключается в решении системы уравнений:

$$\zeta_0(\theta, y) = 0; \zeta_*(\theta, y) = 0; \zeta_j(\theta, y) = 0, j \in K. \quad (10)$$

Пример. Рассмотрим задачу $I(u) = x_2(3) \rightarrow \min$,

$$\dot{x}_1 = x_1 u; \dot{x}_2 = (x_1 - 1)^2, t \in T = [0, 3], x_1(0) = x_1(3) = 2, x_2(0) = 0. \quad (11)$$

Для нее $H(x, \psi, u) = \psi_1 x_1 u + \psi_2 (x_1 - 1)^2$,

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 u - 2\psi_2 (x_1 - 1); \dot{\psi}_2 = -1, t \in T. \quad (12)$$

Пусть $T_0 = [\tau_1, \tau^1]$ — опорный промежуток. На нем особое управление равно $\omega(t) \equiv 0$, $t \in T_0$.

Решив системы (11), (12) с начальным условием $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$, $\psi_1(0) = \psi_{10}$ при управлении

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau_1]; \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau^1]; \\ 1, & t \in [\tau^1, 3], \end{cases}$$

составим систему уравнений доводки (10).

Здесь имеем:

$$\theta = (\psi_{10}, \tau_1, \tau^1),$$

$$\zeta_*(\theta) = 2 \exp(3 - \tau_1 - \tau^1) - 2,$$

$$\zeta_1(\theta) = \psi_{10} (\exp(\tau_1) - 2 \exp(-\tau_1)) + 2,$$

$$\zeta_2(\theta) = \psi_{10} \exp(\tau_1) - (2 \exp(-\tau_1) - 1) (1 + 2\tau_1 - 2\tau^1) + 1.$$

$$\text{Ее решение: } \psi_{10} = -\frac{1}{2}, \tau_1 = \ln 2, \tau^1 = 3 - \ln 2.$$

З а м е ч а н и е. Во многих примерах процедура доводки может быть реализована сразу после выявления структуры оптимального управления без дополнительных предварительных вычислений. В ряде задач оптимизации переходных процессов в ядерном реакторе, как известно, нетрудно выявить структуру оптимального управления. Доводка в таких случаях является эффективным способом получения точных результа-

тов. Однако достижение высокой точности связано с трудоемкими вычислениями, поэтому мы ограничились только простым примером. Решение прикладных задач будет проведено в дальнейшем.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Покатаев А. В. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1989. Ч. 5: Нелинейные задачи.
2. Рудик А. П. Оптимизация физических характеристик в ядерном реакторе. М., 1979.
3. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., 1978.

Поступила в редакцию 15.05.89.

УДК 517.38

НГУЕН ТХАНЬ ХАИ (СРВ)

К ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КАМПЕ ДЕ ФЕРЬЕ

1. Функция Кампе де Ферье впервые определена в [1] через двойной ряд вида

$$F_{C:D;D'}^{A:B;B'} \left[\begin{matrix} (a): (b); (b') \\ (c): (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m+n} \prod_{j=1}^B (b_j)_m \prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_n}{\prod_{j=1}^C (c_j)_{m+n} \prod_{j=1}^D (d_j)_m \prod_{j=1}^{D'} (d'_j)_n} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!},$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+k-1)$, $\Gamma(a)$ — Гамма-функция. (Причем в [1] рассматривался случай $B' = B$, $D' = D$.)

Для ряда (1) в [2] показано, что он сходится при любых $x, y \in \mathbb{C}$, если $A+B < C+D+1$, $A+B' < C+D'+1$. Если же $A+B = C+D+1$, $A+B' = C+D'+1$, то область сходимости ряда (1) соответственно имеет вид

$$\max\{|x|, |y|\} < 1 \text{ при } A \leq C \text{ или}$$

$$|x|^{\frac{1}{A-C}} + |y|^{\frac{1}{A-C}} < 1 \text{ при } A > C.$$

Изучение этой функции представляется очень важной задачей, так как ее частным случаем являются известные функции Аппеля F_1, F_2, F_3, F_4 и Горна $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Xi_1, \Xi_2$ (их определения см. в [3]). При $A = C = 0$ ряд (1) превращается в произведение двух обобщенных гипергеометрических рядов Гаусса [3]:

$$F_{0:D;D'}^{0:B;B'} \left[\begin{matrix} - : (b); (b') \\ - : (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = {}_B F_D(b_1, \dots, b_B; d_1, \dots, d_D; x) {}_{B'} F_{D'}(b'_1, \dots, b'_{B'}; d'_1, \dots, d'_{D'}; y). \quad (2)$$

В настоящей работе устанавливаются различные интегральные представления функции Кампе де Ферье и ее приложения к вычислению интегралов.

2. Интегральные представления и аналитическое продолжение функции Кампе де Ферье.

Теорема 1. Пусть выполняются указанные условия сходимости ряда (1) и, кроме того,