УДК 517.977

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ТЕОРИИ ИНЕРЦИОННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Получены необходимые условия оптимальности для систем с запаздыванием в обобщенной задаче Майера с учетом инерционности в функциональных ограничениях на управление.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ x(t-h),\ u(t),\ t),\ t \in [t_0,\ t_1] = T, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot) = \{\gamma_0(\tau),\ \tau \in [t_0 - h,\ t_0),\ x(t_0) = x_0\}, \tag{2}$$

с ограничениями на управление

$$g_i(u(t),\ \dot{u}(t)) = 0,\ i = \overline{1,\ p},\ g_i(u(t),\ \dot{u}(t)) \leqslant 0,\ i = \overline{p+1,\ q}, \tag{3}$$

$$u(t) \in U,\ t \in T,\ u(t_0) \in U_1,\ u(t_1) \in U_2. \tag{4}$$

Здесь x — n-вектор фазовых переменных; u — m-вектор управления; $h > 0$ — постоянное запаздывание; скалярные функции g_i могут обладать неидеальностями любого рода по u (негладкость, размытость информации, неоднозначность и т. д.) и должны быть положительно однородными [1] по $\dot{u}$ степени $p \geqslant 0 (g_i(u,\ \lambda\dot{u}) = \lambda^p g_i(u,\ \dot{u})$ для любого $\lambda > 0$; множество U — компакт, $U_i \subset U$, $i = 1,\ 2$. Предполагаем, что функция f непрерывна по совокупности своих переменных вместе с частными производными $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$, $\partial^2 f/\partial u^2$, $y(t) = x(t-h)$; $\gamma_0(\tau)$, $\tau \in [t_0 - h,\ t_0]$, x_0 — заданные кусочно-непрерывная вектор-функция и вектор. Всякую непрерывно дифференцируемую функцию $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющую (3), (4), будем называть допустимым управлением.

Качество процесса управления будем оценивать функционалом

$$I(u) = \varphi(x(t_1 + \cdot),\ x(t_1)),\ \varphi\colon C(R^n,\ [t_1 - h,\ t_1]) \times R^n) \to R, \tag{5}$$

где $\varphi(z(\cdot),\ x)$ — непрерывный функционал вместе с производными $\partial\varphi/\partial x$, $\delta\varphi/\delta z(s)$, $\partial\delta\varphi/\partial s \delta z(s)$, $s \in [-h,\ 0]$, по совокупности своих переменных.

Предположим, что $\{u^0(t),\ x^0(t),\ t \in T\}$ — оптимальные управление и траектория в задаче (1)—(5) соответственно, которые назовем ее решением. Найдем необходимые условия оптимальности управления $u^0(t)$, $t \in T$.

2. Внутренняя вариация. Введем в рассмотрение управление

$$\tilde{u}(t) = u^0(t + \varepsilon\delta_1(t)),\ \delta_1(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(\tau)\, d\tau,\ t \in T, \tag{6}$$

где $|\varepsilon|$ — достаточно малое число, функция $\delta(\tau)$ выбирается из класса непрерывных на T, удовлетворяющих условиям

$$\delta_1(t_1) = 0,\ \delta^2(\tau) \leqslant L,\ L > 0,\ \tau \in T. \tag{7}$$

Лемма 1. Управление $\tilde{u}(t)$, $t \in T$, является допустимым в задаче (1)—(5).

Доказательство. Положим $\nu_\varepsilon(t) = t + \varepsilon\delta_1(t)$, $t \in T$, и для нее справедливо

$$\nu_\varepsilon : T \to T, \tag{8}$$

так как $\nu_\varepsilon(t_0) = t_0$, $\nu_\varepsilon(t_1) = t_1$, $d/dt\nu_\varepsilon(t) > 0$, $t \in T$, при достаточно малом $|\varepsilon|$. Из (8) и определения $\delta_1(t)$, $t \in T$, следует выполнение (4).

В силу предположения относительно g_i имеем:

$$g_i(\tilde{u}(t),\ \dot{\tilde{u}}(t)) = g_i(u^0(\nu_\varepsilon(t)),\ (1 + \varepsilon\delta(t))\, d/d\nu_\varepsilon u^0(\nu_\varepsilon(t)) = \tag{9}$$
$$= (1 + \varepsilon\delta(t))^p g_i(u^0(\nu_\varepsilon(t)),\ d/d\nu_\varepsilon u^0(\nu_\varepsilon(t)).$$

Согласно (8), из (9) следует, что $\tilde{u}(t)$, $t \in T$, удовлетворяет (3). Лемма доказана.

Пусть $\tilde{x}(t)$ — решение системы (1), (2), соответствующее управлению $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t) = x^0(t) + \Delta_{\tilde{u}} x^0(t)$, $t \in T$. Справедлива

Лемма 2. Для вариации управления $\Delta u^0(t) = \tilde{u}(t) - u^0(t)$, $t \in T$, имеет место оценка

$$|\Delta_{\tilde{u}} x^0(t)| \leqslant (t_1 - t_0)K|\varepsilon||\delta_1(t)|, \quad K = \text{const}, \quad t \in T, \quad |x|^2 = x'x. \tag{10}$$

Доказательство проводится по традиционной схеме с использованием представления

$$\Delta u^0(t) = \varepsilon \dot{u}^0(t)\delta_1(t) + o_1(\varepsilon), \quad t \in T, \tag{11}$$

и здесь опускается.

Поскольку $\tilde{u}(t)$ принимает те же значения, что и $u^0(t)$, то вариацию $\Delta u^0(t)$, $t \in T$, назовем внутренней.

3. Необходимое условие оптимальности первого порядка. Пусть $\psi^0(t)$, $\psi^0(t, s)$, $t \in T$, $s \in [-h, 0]$,— решение следующих систем уравнений:

$$\dot{\psi}^0(t) = -\frac{\partial f^{0\prime}[t]}{\partial x}\psi^0(t) - \frac{\partial f^{0\prime}[t+h]}{\partial y}\psi^0(t+h) - \psi^0(t, 0) -$$

$$- \psi^0(t+h, -h), \quad \psi^0(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x^0(t_1+\cdot), x^0(t_1))}{\partial x}, \quad \psi^0(t) \equiv 0, \quad t > t_1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\psi^0(t, s)}{\partial t} = \frac{\partial\psi^0(t, s)}{\partial s}, \quad \psi^0(t_1, s) = -\frac{\delta\varphi(x^0(t_1+\cdot), x^0(t_1))}{\delta x(t_1+s)},$$

$$\psi^0(t, s) \equiv 0, \quad t > t_1, \quad f^0[t] = f(x^0(t), y^0(t), u^0(t), t). \tag{13}$$

После ряда преобразований, используя (10), (11), получаем

$$\Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H^{0\prime}[\tau]}{\partial u}\dot{u}^0(\tau)\,d\tau\delta(t)\,dt +$$

$$+ o_2(\varepsilon) \geqslant 0, \quad H^0(t) = \psi^{0\prime}(t)f^0[t]. \tag{14}$$

Поскольку неравенство (14) должно выполняться для любого достаточно малого $|\varepsilon|$, то из него следует равенство нулю определенного интеграла при любом $\delta(t)$, $t \in T$, удовлетворяющем (7). Применяя к этому равенству лемму Дюбуа — Раймона [2], имеем:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H^{0\prime}[\tau]}{\partial u}\dot{u}^0(\tau)\,d\tau = \text{const}, \quad t \in T,$$

что эквивалентно тождеству

$$\frac{\partial H^{0\prime}[t]}{\partial u}\dot{u}^0(t) \equiv 0, \quad t \in T. \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если $\{u^0(t), x^0(t), t \in T\}$ — решение задачи (1)—(5), $\psi^0(t)$, $\psi^0(t, s)$, $t \in T$, $s \in [-h, 0]$,— решение сопряженной системы (12), (13), то выполняется тождество (15).

4. Необходимое условие оптимальности второго порядка. Сузим множество допустимых управлений до дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(t)$, $t \in T$. В качестве вариации управления $\Delta u^0(t)$, $t \in T$, рассмотрим

$$\Delta u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in T \setminus [\Theta, \Theta+\varepsilon), \\ u^0(t+\varepsilon\delta_1(t)) - u^0(t), & t \in [\Theta, \Theta+\varepsilon) \subset T, \end{cases} \tag{16}$$

$$\delta_1(t) = \int_{\Theta}^{t}\delta(\tau)\,d\tau, \quad t \in [\Theta, \Theta+\varepsilon], \quad \delta^{(i)}(\Theta) = \delta^{(i)}(\Theta+\varepsilon) = 0, \quad i = \overline{0, 1},$$

$$\delta(\tau) \in C^{(1)}[\Theta, \Theta+\varepsilon], \quad \delta^2(\tau) \leqslant L, \quad L > 0, \quad \tau \in [\Theta, \Theta+\varepsilon],$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое. Неравенство (10) в этом случае заменяется на

$$|\Delta_{\tilde{u}} x^0(t)| \leqslant K_1 \varepsilon^3, \ K_1 = \text{const}, \ t \in T. \tag{17}$$

Используя (16), (17), (11) с заменой T на $[\Theta, \Theta + \varepsilon)$, а также теорему 1, можно получить неравенство

$$\Delta I(u^0) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_{\Theta}^{\Theta+\varepsilon} \left(\frac{\partial H^{0\prime}[t]}{\partial u} \ddot{u}^0(t) + \dot{u}^{0\prime}(t) \frac{\partial^2 H^0[t]}{\partial u^2} \dot{u}^0(t)\right) \times$$
$$\times \delta_1(t)\, dt + o_3(\varepsilon^5) \geqslant 0. \tag{18}$$

Теорема 2. Если $u^0(t)$, $t \in T$,— оптимальное управление в задаче (1)—(5), то имеет место неравенство:

$$\frac{\partial H^{0\prime}[t]}{\partial u} \ddot{u}^0(t) + \dot{u}^{0\prime}(t) \frac{\partial^2 H^0[t]}{\partial u^2} \dot{u}^0(t) \leqslant 0, \ t \in T. \tag{19}$$

Доказательство неравенства (19) нетрудно получить из (18) с использованием теоремы о среднем.

Нетрудно заметить, что условия (15), (19) по своей сути напоминают известные уравнение Эйлера и условие Лежандра соответственно из классического вариационного исчисления [1, 2].

Замечание. Все результаты сохраняются, если в качестве допустимых управлений рассматривать дважды кусочно-дифференцируемые на T m-вектор функции.

Следует также сказать, что подобные результаты имелись ранее лишь для обыкновенных линейных управляемых систем [3—5].

Список литературы

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск, 1981.
3. Вельов В. М. // Годишн. ВУЗ. Прилож. мат. 1979 (1980). Т. 15. № 1. С. 83.
4. Гичев Т. Р. Оптимално управление. 1. София, 1980.
5. Силин Д. Б. // Вестн. МГУ. Вычислит. матем. и кибернетика. 1982. № 3. С. 44.

Поступила в редакцию 12.12.88.

УДК 517.977

ЛЕ ТЬИ ЗУНГ (СРВ)

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

В [1] исследована задача оптимизации динамической системы

$$\dot{x} = A_0 x + a_0 f_1(x) + bu, \ t \in T = [0, t^*], \ x(0) = x_0 \tag{1}$$

по функционалу качества

$$I(u) = c' x(t^*) \to \min. \tag{2}$$

Там получен опорный принцип максимума и изложена процедура доводки. С целью обобщения результатов на системы, охватывающие более широкий класс физических и технических задач, в данной работе вместо (1), (2) рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x) u, \ t \in T, \ x(0) = x_0 \tag{3}$$

и функционал

$$I(u) = \varphi(x(t^*)) \to \min, \tag{4}$$

где $x = x(t)$ — n-вектор состояния; $u = u(t)$ — значение скалярного управления; x_0 — заданный вектор начального состояния.