$$+\frac{\varepsilon(q+\lambda)[\varphi(s)-\alpha(s,\ q+\lambda-\lambda\varphi(s))]\,[h(q+\lambda-\lambda\varphi(s))-h(q+\lambda-\lambda\pi(q))]}{[q+\lambda-\lambda\varphi(s)]\,[\varphi(s)-\beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]}+$$
$$\left.+\frac{\varepsilon(q+\lambda)[1-h(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]}{q+\lambda-\lambda\varphi(s)}\right\}. \qquad (3)$$

Следствие 1. Преобразование Лапласа среднего суммарного объема в момент t задается выражением

$$\delta_1(q)=\left[1-\frac{\lambda}{q+\lambda}(1-\varepsilon(q+\lambda))\,\pi(q)-\varepsilon(q+\lambda)\,h(q+\lambda-\lambda\pi(q))\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left[\varepsilon(q+\lambda)(h(q)-h(q+\lambda-\lambda\pi(q)))+\frac{\lambda(1-\varepsilon(q+\lambda))(1-\pi(q))}{q+\lambda}\right]\times\right.$$
$$\times\frac{\alpha_s'(s,\ q)|_{s=0}}{q(1-\beta(q))}+\frac{\lambda\varphi_1}{q^2}\left[\varepsilon(q+\lambda)(1-h(q+\lambda-\lambda\pi(q)))+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(1-\varepsilon(q+\lambda))(q+\lambda-\lambda\pi(q))}{q+\lambda}\right]\right\}.$$

Следствие 2. При $\lambda\beta_1<1$ имеем $\sigma(t)\Rightarrow\sigma$ при $t\to\infty$ в смысле слабой сходимости. ПЛС ф. р. случайной величины σ имеет вид

$$\delta(s)=\lim_{q\downarrow 0} q\,\delta(s,\ q)=\frac{1-\lambda\beta_1}{1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1}\left\{\left[1-\varepsilon(\lambda)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\varepsilon(\lambda)(1-h(\lambda-\lambda\varphi(s)))}{1-\varphi(s)}\right]\left[1+\frac{\varphi(s)-\alpha(s,\ \lambda-\lambda\varphi(s))}{\beta(\lambda-\lambda\varphi(s))-\varphi(s)}\right]\right\}. \qquad (4)$$

Следствие 3. Первые два момента случайной величины σ определяются по формулам:

$$\delta_1=\lambda\alpha_{11}+\frac{\lambda^2\beta_2\varphi_1}{2(1-\lambda\beta_1)}+\frac{\lambda^2 h_2\,\varepsilon(\lambda)\,\varphi_1}{2(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}, \qquad (5)$$

$$\delta_2=\lambda(\alpha_{21}+\lambda\varphi_1\alpha_{12})+\frac{\lambda^2\beta_2\varphi_1\alpha_{11}}{1-\lambda\beta_1}+\frac{\lambda^2\beta_2\varphi_2}{2(1-\lambda\beta_1)}+\frac{\lambda^3\beta_3\varphi_1^2}{3(1-\lambda\beta_1)}+$$
$$+\frac{\lambda^4\beta_2^2\varphi_1^2}{2(1-\lambda\beta_1)^2}+\frac{\lambda^3\varepsilon(\lambda)h_2\varphi_1\alpha_{11}}{1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1}+\frac{\lambda^2\varepsilon(\lambda)h_2\varphi_2}{2(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}+$$
$$+\frac{\lambda^3\varepsilon(\lambda)h_3\varphi_1^2}{3(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}+\frac{\lambda^4\varepsilon(\lambda)h_2^2\varphi_1^2}{2(1-\lambda\beta_1)(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}. \qquad (6)$$

Легко убедиться, что в случае абсолютно надежного прибора формулы (3)—(6) дают известные соотношения [2].

Список литературы

1. Тихоненко О. М. Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 111.
2. Tikhonenko O. M. // Journ. Inf. Process. Cybenr. EIK. 1987. V. 23. № 7. P. 339.
3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., 1966.
4. Приоритетные системы обслуживания / Гнеденко Б. В. и др. М., 1973.

Поступила в редакцию 23.11.88.

УДК 519.24

Ю. В. МЕЛЕНЕЦ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОРЕГРЕССИЙ

Пусть $\{X_t,\ t=1,\ 2,\ \ldots\}$ — нестационарный случайный процесс, математическое ожидание и ковариации которого ограничены и являются периодическими функциями. Возможность описания такого процесса уравнениями авторегрессии с постоянными коэффициентами весьма проблематична [1]. В связи с этим предлагается рассматривать модель авторегрессии, параметры которой являются периодическими функциями:

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) X_{t-k} + \xi_t, \tag{1}$$

где ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ — нестационарная последовательность независимых случайных величин с $M\xi_t = 0$, $D\xi_t = \sigma_t^2$, $\sigma_\tau^2 = \sigma_{\tau+jT}^2$; $a_k(\tau) = a_k(\tau + jT)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant \tau \leqslant T$, $j = 1, 2, \ldots$; T — натуральное число, имеющее смысл периода.

Вопросам исследования свойств временного ряда X_t, получаемого при помощи (1), посвящен ряд работ [2—4]. В настоящей статье предполагается, что период T известен, и рассматриваются две задачи.

1. В ситуации, когда ξ_t есть гауссовская последовательность, необходимо по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_N$ оценить nT коэффициентов $a_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant \tau \leqslant T$, T дисперсий σ_τ^2, $1 \leqslant \tau \leqslant T$ и исследовать свойства получаемых оценок.

2. Построить оценку одного из пропущенных значений в выборке $x_1, x_2, \ldots, x_N$ по известным значениям X_t до и после пропуска и исследовать свойства этой оценки.

Отметим, что задача оценивания коэффициентов $a_k(\tau)$ в модели (1) рассматривалась в [2]. Здесь использовалась система уравнений, аналогичных уравнениям Юла — Уолкера для стационарных авторегрессий с постоянными коэффициентами. Замена теоретических ковариаций на выборочные и решение получившейся системы относительно коэффициентов $a_k(\tau)$ давало оценки этих параметров. Но практическая реализация этой процедуры малоэффективна и требует асимптотически больших объемов выборки.

Для решения п е р в о й з а д а ч и применим метод максимального правдоподобия. Первые n элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ считаем начальными значениями авторегрессии. Запишем плотность распределения случайных величин $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_N$ в виде:

$$(2\pi)^{\frac{n-N}{2}} \left(\prod_{t=n+1}^{N} \sigma_t\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=n+1}^{N} \sigma_t^{-2} \xi_t^2\right\} \tag{2}$$

и перейдем в (2) от переменных $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_N$ к переменным $x_{n+1}, \ldots, x_N$. Из (1) получаем, что якобиан этого преобразования равен 1, и совместная плотность значений $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_N$ есть:

$$f(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_N = x_n / \{a_k(\tau), \sigma_\tau^2, 1 \leqslant \tau \leqslant T, 1 \leqslant k \leqslant n\}) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-N}{2}} \left(\prod_{t=n+1}^{N} \sigma_t\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=n+1}^{N} \sigma_t^{-2} \left(x_t - \sum_{k=1}^{n} a_k(t) x_{t-k}\right)^2\right\}. \tag{3}$$

Введем обозначения: $\alpha_T = \left[\frac{N-n}{T}\right]$ — целое число циклов, содержащихся в наблюдаемой реализации $x_{n+1}, \ldots, x_N$; $N - n = \alpha_T T + \beta_T$, $0 \leqslant \beta_T < T$;

$$m_t = \begin{cases} \alpha_T + 1, \text{ если } 1 \leqslant t \leqslant \beta_T, \\ \alpha_T, \text{ если } \beta_T < t \leqslant T. \end{cases}$$

Из (3) и введенных обозначений следует, что логарифм функции правдоподобия оцениваемых параметров записывается в виде:

$$l(\{a_k(\tau), \sigma_\tau^2, 1 \leqslant \tau \leqslant T, 1 \leqslant k \leqslant n\}) = \frac{n-N}{2} \ln 2\pi - \sum_{\tau=1}^{T} \sum_{j=1}^{m_\tau} \sigma_{n+\tau+(j-1)T} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{T} \sum_{j=1}^{m_\tau} \sigma_{n+\tau+(j-1)T}^{-2} \Big(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^{n} a_k(n + \tau + (j-1)T) \times$$

$$\times x_{n+\tau+(j-1)T-k}\Big)^2. \tag{4}$$

Используя (4) и свойство периодичности параметров $\{a_k(\tau),\ \sigma^2_\tau\}$, получаем, что задача оценивания совокупности этих параметров распадается на T однотипных задач. При фиксированном значении τ, $1 \leqslant \tau \leqslant T$ оценки коэффициентов $a_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ находятся как решение задачи:

$$\sum_{j=1}^{m_\tau} \left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^{n} a_k(n+\tau)\, x_{n+\tau+(j-1)T-k}\right)^2 \to \min_{\{a_k(\tau)\}}, \tag{5}$$

а дисперсия $\sigma^2_{\tau+n}$ по найденным оценкам $\hat{a}_k(\tau)$ определяется по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}^2_{\tau+n} = \frac{1}{m_\tau - 1} \sum_{j=1}^{m_\tau} \left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k(n+\tau)\, x_{n+\tau+(j-1)T-k}\right)^2. \tag{6}$$

Решение задачи (5) записывается в виде:

$$\hat{A}_\tau = (Z^*_\tau Z_\tau)^{-1} Z^*_\tau X_\tau, \tag{7}$$

где обозначено: $\hat{A}_\tau = [\hat{a}_k(n+\tau),\ 1 \leqslant k \leqslant n]^*$, $X_\tau = [x_{n+\tau+(j-1)T},\ 1 \leqslant j \leqslant m_\tau]^*$, $Z_\tau = \| x_{n+(i-1)T+\tau-j}\ 1 \leqslant i \leqslant m_\tau,\ 1 \leqslant j \leqslant n \|$.

Для исследования свойств оценок (6) и (7) введем в рассмотрение матрицу $B(r) = \|b_{ij}(r)\|$, $1 \leqslant i, j \leqslant T$, где

$$b_{ij}(r) = \begin{cases} r^n, & i = j, \\ -a_{i-j}(i)\, r^{n-(i-j)}, & i > j, \\ -a_{T+i-j}(i)\, r^{n-(T+i-j)}, & i < j, \end{cases}$$

и предположим, что корни уравнения $\det B(r) = 0$ ограничены по модулю единицей. Для этого случая в [3] показано, что

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j(t)\, \xi_{t-j}, \tag{8}$$

где коэффициенты $\delta_j(t)$ периодичны по t с периодом T и ряд в правой части (8) сходится в среднеквадратическом смысле. При выполнении (8) удается доказать, что оценки (6) и (7) являются состоятельными. Доказательство проводится аналогично тому, как это делается в [5] для стационарных авторегрессий с постоянными коэффициентами, и не приводится из-за громоздкости.

Алгоритм оценивания параметров периодических авторегрессий по методу максимального правдоподобия реализован на ЭВМ, и исследование возможности его применения проводилось методами статистического моделирования. Приведем в качестве примера результаты просчетов для авторегрессии порядка $n = 1$ с периодом $T = 5$ и с объемами выборок $N = 500$ и $N = 1000$. Обработке подвергалось по 50 реализаций. Значения параметров, их оценки и доверительные интервалы с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ приведены в таблице, анализ данных которой свидетельствует о работоспособности рассматриваемого алгоритма.

Во второй задаче предполагается, что в выборке $x_1, x_2, \ldots, x_N$ имеется $[l,\ l+s]$ — интервал пропущенных значений, $1 \leqslant l \leqslant N - s$, и требуется восстановить одно из этих значений, относящихся к моменту $l + m$, $0 \leqslant m \leqslant s$. Интерполяционную формулу для оценки представим в виде:

$$\hat{x}_{l+m} = \sum_{j=1}^{N_1} d_j x_{l-j} + \sum_{j=1}^{N_2} h_j x_{l+s+j}, \tag{9}$$

где $1 \leqslant N_1 \leqslant l - 1$, $1 \leqslant N_2 \leqslant N - s - l$. Качество ошибки (9) будем характеризовать средним квадратом оценки: $M(x_{l+m} - \hat{x}_{l+m})^2$, т. е. па-

Результаты численных экспериментов

Параметры	$N=500$		$N=1000$	
	Оценки	Доверительные интервалы	Оценки	Доверительные интервалы
$a_1(1)=0,2$	0,2026	[0,1976, 0,2076]	0,1989	[0,1958, 0,2019]
$a_1(2)=0,8$	0,7906	[0,7856, 0,7956]	0,7942	[0,7913, 0,7970]
$a_1(3)=-1,5$	−1,4935	[−1,5141, −1,4729]	−1,5075	[−1,5177, −1,4974]
$a_1(4)=1,2$	1,1936	[1,1727, 1,2145]	1,2015	[1,1853, 1,2177]
$a_1(5)=2,0$	1,9888	[1,9731, 2,0045]	2,0087	[1,9986, 2,0188]
$\sigma_1^2=0,5$	0,4698	[0,4584, 0,4812]	0,4948	[0,4890, 0,5006]
$\sigma_2^2=1,0$	0,9584	[0,9331, 0,9827]	1,0213	[0,9203, 1,1223]
$\sigma_3^2=0,8$	0,8314	[0,8114, 0,8514]	0,7926	[0,7830, 0,8022]
$\sigma_4^2=3,5$	3,7001	[3,6670, 3,7232]	3,5206	[3,5100, 3,5312]
$\sigma_5^2=2,4$	2,2602	[2,2498, 2,2706]	2,4013	[2,3957, 2,4069]

раметры $\{d_1, \ldots, d_{N_1}, h_1, \ldots, h_{N_2}\}$ должны определяться как решение задачи:

$$M\left(x_{l+m} - \sum_{j=1}^{N_1} d_j x_{l-j} - \sum_{j=1}^{N_2} h_j x_{l+s+j}\right)^2 \to \min_{\{d_j, h_j\}}. \qquad (10)$$

Обозначим $R_\tau(k) = M(x_\tau x_{\tau+k})$ — ковариации длины k процесса x_t в точке $t=\tau$. Из (10) следует, что искомые коэффициенты $\{d_j, h_j\}$ удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N_1} d_j R_l(j-k) + \sum_{j=1}^{N_2} h_j R_l(s+j+k) = R_l(m+k),\ 1 \leqslant k \leqslant N_1, \\ &\sum_{j=1}^{N_1} d_j R_l(s+j+k) + \sum_{j=1}^{N_2} h_j R_l(j-k) = R_l(m-s-k),\ 1 \leqslant k \leqslant N_2, \end{aligned} \qquad (11)$$

решение которой не представляет труда. Если коэффициенты $\{a_k(\tau),$ $1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant \tau \leqslant T\}$ и дисперсии $\{\sigma_\tau^2,\ 1 \leqslant \tau \leqslant T\}$ известны, то ковариации $R_l(k)$ процесса X_t из (1) могут быть найдены из системы уравнений Юла — Уолкера [2], в противном случае теоретические ковариации могут быть заменены их выборочными оценками.

Численные эксперименты восстановления пропущенных значений для модели (1) реализованы на ЭВМ и их работоспособность доказана методами имитационного моделирования.

Список литературы

1. Меленец Ю. В. Представление квазипериодических случайных процессов уравнениями авторегрессии / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Минск, 1982. Деп. в ВИНИТИ 25.11.82. № 5833-82.
2. Pagano M. // Ann. Statist. 1978. V. 6. N. 1. P. 1310.
3. Troutman B. M. // Biometrica. 1979. V. 66. N. 2. P. 219.
4. Tiao G. C., Grupe M. R. Ibid. 1980. V. 67. N. 2. P. 365.
5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976. С. 220.

Поступила в редакцию 28.03.89.