где $|<U_{ig}>|$ — длина последовательности сообщений из СУ$_i$ о завершении g-го обновления по запросу x_{ig}; m — число копий ЭД и ИС; знак $\preceq$ означает совпадение номеров запросов в последовательностях $<A_{ig}>$ и X_i, $|A_i| \leqslant |X_i|$.

Инвариант (12) утверждает, что в выходной последовательности Y отсутствует последовательность из нескольких сообщений блокировки. Он отражает свойство целостности распределенного информационного фонда при управлении методом блокировки, а именно: в любой момент времени только одна из СУ может владеть правом обновлять ЭД в ИС. В соответствии с (13) очередность обновлений соответствует очередности запросов пользователей для каждой СУ. Выполнение формулы (14) гарантирует свойство атомарности транзакций обновления ЭД и непротиворечивости всех копий ЭД до и после обновления.

Критерием живости всего протокола является утверждение о неограниченности размера последовательности $<A_{ig}>$ для каждого СУ, при неограниченном размере X_i:

$$\forall i,\ n:\ \Diamond\, |X_i| > n \rightarrow \Diamond\, |A_i| \geqslant n. \tag{15}$$

Аналогично в качестве критерия живости можно использовать свойство безграничности роста выходной последовательности сообщений $U_{ig} \in \alpha_i$.

Для индуктивного доказательства живости необходимо установить, что $\Box\,(|A_i| = k \rightarrow \Diamond\, |A_i| = k+1)$, где $k = 1, 2, \ldots$.

Для доказательства корректности протокольных программ вначале производится независимо друг от друга их проверка с использованием утверждений о свойствах СУ на языке логики. Затем осуществляется доказательство свойств всего протокола, которое основано на формальном описании компонент и среды передачи данных внутри данной логической системы аксиоматическим методом. Другой подход состоит в генерации графа состояний протокола на основе изучения параллельных программ. Тогда общие свойства протокола проверяются на графе состояний.

Список литературы

1. Venkatraman R. C., Piatkowski T. F. A Formal Comparison of Formal Protocol Specification Techniques // Protocol Specification, Testing and Verification, V / Ed. by M. Diaz. North Holland Publ. 1986. P. 401.
2. Malyarov A. N. Temporal Logic Usage in the Protocols of Distributed Data Bases // Proc. 4th Int. Conf. of Program Designers / Ed. by A. Ivanyi. Budapest, 1988. P. 49.
3. Зиновьев Э. В. Управление сетевыми информационными ресурсами. Рига, 1987.
4. Якубайтис Э. А. Информационно-вычислительные сети. М., 1984.

Поступила в редакцию 12.11.88.

УДК 65.012.122

О. М. ТИХОНЕНКО

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММАРНОГО ОБЪЕМА ТРЕБОВАНИЙ В ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С НЕНАДЕЖНЫМ ОБСЛУЖИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ

Рассмотрим систему $M|G|1|\infty$ с неоднородными требованиями. Каждое требование характеризуется некоторой случайной длиной ζ, независимой от длин других требований. Время обслуживания ξ будем считать зависящим только от длины обслуживаемого требования. Задана совместная функция распределения $F(x, t) = P\{\zeta < x,\ \xi < t\}$. Под суммарным объемом $\sigma(t)$ будем понимать [1, 2] полную сумму длин требований, находящихся в системе в момент времени t.

Будем считать, что обслуживающий прибор (ОП) в свободном состоянии может выйти из строя. Пусть T — момент времени, в который система освободилась от требований, и на промежутке $[T, T+t]$ новые требования в систему не поступали. Тогда на этом промежутке ОП выйдет из строя с вероятностью $E(t)$. Вышедший из строя ОП восстанавливается в течение некоторого случайного промежутка времени, функция распределения (ф. р.) которого равна $H(t)$. В период восстановления ОП требования, поступившие в систему, не обслуживаются. В занятом состоянии ОП работает надежно.

Целью работы является определение функции

$$\delta(s, q) = \int_0^\infty e^{-qt} M e^{-s\sigma(t)} dt$$

в предположении, что начальные условия работы системы — нулевые, т. е. $\sigma(0) = 0$.

Обозначим через λ интенсивность входного потока, пусть $B(t) = F(\infty, t)$ — ф. р. времени обслуживания, $L(x) = F(x, \infty)$ — ф. р. длин требований. Через α_{ij} обозначим смешанный момент порядка $i+j$ ф. р. $F(x, t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Моменты порядка i ф. р. $L(x)$, $B(t)$ и $H(t)$ обозначим соответственно через φ_i, β_i и h_i. Преобразования Лапласа — Стилтьеса (ПЛС) функций $F(x, t)$, $L(x)$, $B(t)$, $E(t)$, $H(t)$ обозначим соответственно $\alpha(s, q)$, $\varphi(s)$, $\beta(q)$, $\varepsilon(q)$, $h(q)$. В [1, 2] определяется функция $\delta(s, q)$ для случая надежного ОП, т. е. при $E(t) \equiv 0$.

Для определения $\delta(s, q)$ воспользуемся модифицированным методом введения дополнительного события, считая, что независимо от процесса функционирования системы происходят катастрофы, которые образуют простейший поток интенсивности q, и каждое требование независимо от других окрашивается либо в синий, либо в красный цвет. В отличие от известного метода [3] будем считать, что вероятность того, что произвольное требование окажется красным, зависит от его длины. Вероятность того, что требование длины x красное, положим равной e^{-sx}. Тогда, легко видеть, $\varphi(s)$ имеет смысл вероятности того, что произвольное требование — красное, $\alpha(s, q)$ — вероятность того, что произвольное требование — красное и за время его обслуживания не происходили катастрофы.

Пусть известно, что требование, занимающее в произвольный момент времени ОП, к данному моменту обслуживалось в течение времени y. Тогда вероятность того, что это требование красное, равна [2]:

$$e_y(s) = [1 - B(y)]^{-1} \int_{x=0}^\infty e^{-sx} \int_{u=y}^\infty dF(x, u). \tag{1}$$

Обозначим через $\pi(q)$ ПЛС ф. р. периода занятости системы $M|G|1|\infty$ при $E(t) \equiv 0$. Пусть $\pi_n(q) = [\pi(q)]^n$ — ПЛС ф. р. так называемого n-периода, т. е. периода занятости, начинающегося с того момента, когда в системе находится n требований. Пусть $\Pi^n(x, y, t)\,dx\,dy$ — вероятность того, что через промежуток времени длины t после начала n-периода (в предположении, что к этому моменту он не завершился) суммарный объем равен x, а с последнего момента окончания обслуживания прошло время y. Обозначим:

$$\pi_n(s, y, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-qt} \Pi^{(n)}(x, y, t)\,dx\,dt,$$

$$\pi_n(s, q) = \int_0^\infty \pi_n(s, y, q)\,dy.$$

Через $P(s, y, q)$ обозначим преобразование Лапласа по t ПЛС условной ф. р. суммарного объема требований, находящихся в системе через t единиц времени после начала периода регенерации (момента прихода требования в пустую систему) при условии, что с последнего момента окончания обслуживания прошло время y.

Пользуясь модифицированным методом введения дополнительного события с учетом (1) легко по аналогии с [4] получить следующие утверждения.

Лемма 1. Функции $\pi_n(s, y, q)$, $\pi_n(s, q)$ соответственно определяются по формулам:

$$\pi_n(s, y, q) = \frac{e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y}[(\varphi(s))^n - (\pi(q))^n]}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int\limits_{u=y}^{\infty} dF(x, u),$$

$$\pi_n(s, q) = \frac{[(\varphi(s))^n - (\pi(q))^n][\varphi(s) - \alpha(s, q+\lambda-\lambda\varphi(s))]}{[\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))][q+\lambda-\lambda\varphi(s)]}.$$

Лемма 2. Функция $P(s, y, q)$ определяется соотношением

$$P(s, y, q) = (1 - E(y))e^{-(q+\lambda)y} + \frac{\varepsilon(q+\lambda)}{q+\lambda} e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} \times$$

$$\times \frac{\varphi(s) - \pi(q)}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int\limits_{u=y}^{\infty} dF(x, u) +$$

$$+ \frac{\varepsilon(q+\lambda)[h(q+\lambda-\lambda\varphi(s)) - h(q+\lambda-\lambda\pi(q))]}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} \times$$

$$\times \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int\limits_{u=y}^{\infty} dF(x, u) + \varepsilon(q+\lambda)[1 - H(y)]e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y}.$$

Известно [4], что ПЛС ф. р. периода регенерации рассматриваемой системы имеет вид

$$r(q) = \frac{\lambda}{q+\lambda}[1 - \varepsilon(q+\lambda)]\pi(q) + \varepsilon(q+\lambda)h(q+\lambda-\lambda\pi(q)). \quad (2)$$

Через $\delta(s, y, q)$ обозначим преобразование Лапласа по t от ПЛС условной ф. р. случайной величины $\sigma(t)$ при условии, что с последнего момента восстановления ОП или окончания обслуживания прошло время y. Очевидно,

$$\delta(s, g) = \int\limits_0^{\infty} \delta(s, y, q)\,dy.$$

Из леммы 2 и (2) следует

Теорема. а) Функция $\delta(s, y, q)$ вычисляется по формуле

$$\delta(s, y, q) = \left[1 - \frac{\lambda}{q+\lambda}(1 - \varepsilon(q+\lambda))\pi(q) - \varepsilon(q+\lambda)h(q+\lambda-\lambda\pi(q))\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{[1 - E(y)]e^{-(q+\lambda)y} + \frac{\lambda e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y}[1 - \varepsilon(q+\lambda)][\varphi(s) - \pi(q)]}{(q+\lambda)[\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]} \times\right.$$

$$\times \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int\limits_{u=y}^{\infty} dF(x, u) + \varepsilon(q+\lambda)[1 - H(y)]e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(q+\lambda)[h(q+\lambda-\lambda\varphi(s)) - h(q+\lambda-\lambda\pi(q))]}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} \times$$

$$\left.\times \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int\limits_{u=y}^{\infty} dF(x, u)\right\}.$$

б) Функция $\delta(s, q)$ имеет вид

$$\delta(s, q) = \left[1 - \frac{\lambda}{q+\lambda}(1 - \varepsilon(q+\lambda))\pi(q) - \varepsilon(q+\lambda)h(q+\lambda-\lambda\pi(q))\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\frac{1 - \varepsilon(q+\lambda)}{q+\lambda} + \frac{\lambda[1 - \varepsilon(q+\lambda)][\varphi(s) - \alpha(s, q+\lambda-\lambda\varphi(s))][\varphi(s) - \pi(q)]}{(q+\lambda)(q+\lambda-\lambda\varphi(s))[\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]} +\right.$$

$$+\frac{\varepsilon(q+\lambda)[\varphi(s)-\alpha(s,\ q+\lambda-\lambda\varphi(s))][h(q+\lambda-\lambda\varphi(s))-h(q+\lambda-\lambda\pi(q))]}{[q+\lambda-\lambda\varphi(s)][\varphi(s)-\beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]}+$$
$$+\left.\frac{\varepsilon(q+\lambda)[1-h(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]}{q+\lambda-\lambda\varphi(s)}\right\}. \qquad (3)$$

Следствие 1. Преобразование Лапласа среднего суммарного объема в момент t задается выражением

$$\delta_1(q)=\left[1-\frac{\lambda}{q+\lambda}(1-\varepsilon(q+\lambda))\pi(q)-\varepsilon(q+\lambda)h(q+\lambda-\lambda\pi(q))\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left[\varepsilon(q+\lambda)(h(q)-h(q+\lambda-\lambda\pi(q)))+\frac{\lambda(1-\varepsilon(q+\lambda))(1-\pi(q))}{q+\lambda}\right]\times\right.$$
$$\times\frac{\alpha_s'(s,\ q)|_{s=0}}{q(1-\beta(q))}+\frac{\lambda\varphi_1}{q^2}\left[\varepsilon(q+\lambda)(1-h(q+\lambda-\lambda\pi(q)))+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(1-\varepsilon(q+\lambda))(q+\lambda-\lambda\pi(q))}{q+\lambda}\right]\right\}.$$

Следствие 2. При $\lambda\beta_1<1$ имеем $\sigma(t)\Rightarrow\sigma$ при $t\to\infty$ в смысле слабой сходимости. ПЛС ф. р. случайной величины σ имеет вид

$$\delta(s)=\lim_{q\downarrow 0}q\,\delta(s,\ q)=\frac{1-\lambda\beta_1}{1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1}\left\{\left[1-\varepsilon(\lambda)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\varepsilon(\lambda)(1-h(\lambda-\lambda\varphi(s)))}{1-\varphi(s)}\right]\left[1+\frac{\varphi(s)-\alpha(s,\ \lambda-\lambda\varphi(s))}{\beta(\lambda-\lambda\varphi(s))-\varphi(s)}\right]\right\}. \qquad (4)$$

Следствие 3. Первые два момента случайной величины σ определяются по формулам:

$$\delta_1=\lambda\alpha_{11}+\frac{\lambda^2\beta_2\varphi_1}{2(1-\lambda\beta_1)}+\frac{\lambda^2h_2\,\varepsilon(\lambda)\,\varphi_1}{2(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}, \qquad (5)$$

$$\delta_2=\lambda(\alpha_{21}+\lambda\varphi_1\alpha_{12})+\frac{\lambda^2\beta_2\varphi_1\alpha_{11}}{1-\lambda\beta_1}+\frac{\lambda^2\beta_2\varphi_2}{2(1-\lambda\beta_1)}+\frac{\lambda^3\beta_3\varphi_1^2}{3(1-\lambda\beta_1)}+$$
$$+\frac{\lambda^4\beta_2^2\varphi_1^2}{2(1-\lambda\beta_1)^2}+\frac{\lambda^3\varepsilon(\lambda)h_2\varphi_1\alpha_{11}}{1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1}+\frac{\lambda^2\varepsilon(\lambda)h_2\varphi_2}{2(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}+$$
$$+\frac{\lambda^3\varepsilon(\lambda)h_3\varphi_1^2}{3(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}+\frac{\lambda^4\varepsilon(\lambda)h_2^2\varphi_1^2}{2(1-\lambda\beta_1)(1-\varepsilon(\lambda)+\lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}. \qquad (6)$$

Легко убедиться, что в случае абсолютно надежного прибора формулы (3)—(6) дают известные соотношения [2].

Список литературы

1. Тихоненко О. М. Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 111.
2. Tikhonenko O. M. // Journ. Inf. Process. Cybenr. EIK. 1987. V. 23. № 7. P. 339.
3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., 1966.
4. Приоритетные системы обслуживания / Гнеденко Б. В. и др. М., 1973.

Поступила в редакцию 23.11.88.

УДК 519.24

Ю. В. МЕЛЕНЕЦ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОРЕГРЕССИЙ

Пусть $\{X_t,\ t=1,\ 2,\ \ldots\}$ — нестационарный случайный процесс, математическое ожидание и ковариации которого ограничены и являются периодическими функциями. Возможность описания такого процесса уравнениями авторегрессии с постоянными коэффициентами весьма проблематична [1]. В связи с этим предлагается рассматривать модель