Математика и механика

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, ДО ЗУЙ ЧИНЬ (СРВ)

ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Рассматривается параметрическая задача $P(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = \min\{F(x, \lambda); x \in D \subseteq Z_+^n\},$$

где $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$, λ — неотрицательный параметр; $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$; $g(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)$; $f_j(x_j)$, $g_j(x_j)$ — выпуклые функции; D — координатно-выпуклое множество в Z_+^n, Z_+^n — множество неотрицательных целочисленных векторов. Напомним понятие координатно-выпуклого множества [1]. Окрестностью вектора $x \in D$ называется множество $O(x) = \{x' \in D: d(x, x') \leqslant 1\}$, где $d(x, y) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j| - \sum_{j=1}^{n} |y_j|\right)$. Множество $D \subseteq Z_+^n$ назовем координатно-выпуклым, если для любых x, $y \in D$ существует последовательность $x = x^0, x^1, \ldots, x^k = y$ точек из множества D, обладающая свойством $x^{i+1} = x^i + \xi^i$, где $\xi^i + x \in O(x)$, $\xi^i = e_i$, или $-e_i$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, k$, $k = d(x, y)$.

Задача $P(\lambda)$ при фиксированном λ есть задача минимизации сепарабельной выпуклой функции на координатно-выпуклом множестве и для ее решения существует эффективный метод [1]. Функция $\varphi(\lambda)$ является вогнутой кусочно-линейной с конечным числом точек излома $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$. Каждому интервалу $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ соответствует решение x^k задачи $P(\lambda)$, которое является оптимальным для всех $\lambda \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. В работе предложен алгоритм вычисления точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и соответствующих оптимальных решений. Частный случай задачи, когда координатно-выпуклое множество D имеет вид $D = \{x \in Z_+^n: \sum_{j=1}^{n} x_j = M, v_j \leqslant x_j \leqslant u_j$, x_j — целое, $j = 1, \ldots, n\}$, рассмотрен в [2].

2. Для функции $f(x)$, определенной на Z_+^n, введем разностные операторы, так называемые градиенты [1]: $\nabla_i^+ f(x) = f(x + e_i) - f(x)$, $\nabla_i^- f(x) = f(x - e_i) - f(x)$, $\nabla_{ij}^{+-} f(x) = \nabla_i^+(\nabla^- f(x))$.

Введем также операторы, определяющие допустимые направления в точке x:

$$\mathrm{fes}^+(x, D) = \{i : x + e_i \in D\},\ \mathrm{fes}^-(x, D) \in \{i : x - e_i \in D\},$$

$$\mathrm{fes}^{+-}(x, D) = \{(i, j) : x + e_i - e_j \in D\}.$$

Критерий оптимальности [1]. Точка x^0 есть оптимальное решение задачи $P(\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\nabla_i^+ F(x, \lambda) \geqslant 0 \quad \forall_i \in \text{fes}^+(x^0, D), \tag{1}$$

$$\nabla_i^- F(x, \lambda) \geqslant 0 \quad \forall_i \in \text{fes}^-(x^0, D), \tag{2}$$

$$\nabla_{ij}^{+-} F(x, \lambda) \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in \text{fes}^{+-}(x^0, D). \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$\text{fes}^+_{-(+)}(x, D) = \{i{:}\ i \in \text{fes}^+(x, D),\ \nabla_i^+ g_i(x) < 0\ (> 0)\},$$

$$\text{fes}^-_{-(+)}(x, D) = \{i{:}\ i \in \text{fes}^-(x, D),\ \nabla_i^- g_i(x) < 0\ (>0)\},$$

$$\text{fes}^{+-}_{-(+)}(x, D) = \{i, j) \in \text{fes}^{+-}(x, D){:}\ \nabla_{ij}^{+-} g(x) < 0\ (> 0)\},$$

$$\lambda^1(i, x) = -\nabla_i^+ f(x)/\nabla_i^+ g(x), \tag{4}$$

$$\lambda^2(i, x) = -\nabla_i^- f(x)/\nabla_i^- g(x), \tag{5}$$

$$\lambda^3(i, j, x) = -\nabla_{ij}^{+-} f(x)/\nabla_{ij}^{+-} g(x). \tag{6}$$

Для оптимального решения x^λ задачи $P(\lambda)$ найдем границы:

$$\lambda_+^1(x^\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \text{fes}_-^+(x^\lambda, D) = \varnothing, \\ \min\{\lambda^1(i, x^\lambda) \geqslant \lambda,\ i \in \text{fes}_-^+(x^\lambda, D)\} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\lambda_-^1(x^\lambda) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \text{fes}_+^+(x^\lambda, D) = \varnothing, \\ \max\{\lambda^1(i, x^\lambda) \leqslant \lambda,\ i \in \text{fes}_+^+(x^\lambda, D)\} & \text{в противном случае}\cdot \end{cases}$$

Аналогично определим $\lambda_+^2(x^\lambda)$, $\lambda_-^2(x^\lambda)$, $x_+^3(x^\lambda)$, $\lambda_-^3(x^\lambda)$.

Пусть далее

$$\lambda_+(x^\lambda) = \min\{\lambda_+^i(x^\lambda){:}\ i = 1, 2, 3\}, \tag{7}$$

$$\lambda_-(x^\lambda) = \max\{\lambda_-^i(x^\lambda){:}\ i = 1, 2, 3\}. \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть x^λ — оптимальное решение задачи для некоторого $\lambda \geqslant 0$. Тогда

а) x^λ — оптимальное решение задач $P(\lambda^1)$ для любого $\lambda^1 \in [\lambda_-(x^\lambda), \lambda_+(x^\lambda)]$;

б) если $\lambda_-(x^\lambda) > 0$, то точка

$$x_-^\lambda = \begin{cases} x^\lambda + e_{i^*}, & \text{если } \lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^1(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda - e_{i^*}, & \text{если } \lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^2(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda + e_{i^*} + e_{j^*}, & \text{если } \lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^3(i^*, j^*, x^\lambda) \end{cases} \tag{9}$$

является также оптимальным решением задачи $P(\lambda_-(x^\lambda))$;

в) если $\lambda_+(x^\lambda) < +\infty$, то точка

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda + e_{i^*}, & \text{если } \lambda_+(x^\lambda) = \lambda_+^1(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda - e_{i^*}, & \text{если } \lambda_+(x^\lambda) = \lambda_+^2(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda + e_{i^*} - e_{j^*}, & \text{если } \lambda_+(x^\lambda) = \lambda_+^3(i^*, j^*, x^\lambda) \end{cases} \tag{10}$$

является оптимальным решением задачи $P(\lambda_+(x^\lambda))$.

Доказательство. а) Из того, что x^λ — оптимальное решение задачи $P(\lambda)$, и из критерия оптимальности следует

$$\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda) \geqslant 0 \ \forall i \in \text{fes}^+(x^\lambda, D). \tag{11}$$

Отсюда и из (7) вытекает $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda^1) \geqslant 0$ $\forall i \in \text{fes}_-^+(x^\lambda, D)$, $\forall \lambda^1 \in [\lambda, \lambda_+(x^\lambda)]$.

Следовательно, для каждого $i \in \text{fes}^+(x^\lambda, D) \setminus \text{fes}_-^+(x^\lambda, D)$ имеем $\triangle_i^+ g(x) \geqslant 0$. Отсюда для $\lambda' \in [\lambda, \lambda_+(x^\lambda)]$ из (11) вытекает $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda') = \nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda) + (\lambda' - \lambda)\nabla_i^+ g(x^\lambda) \geqslant 0$.

Таким образом, условие (1) критерия оптимальности выполняется для точки x^λ и параметра λ'. Аналогично доказывается выполнение условий (2) и (3). Откуда следует, что x^λ — оптимальное решение задачи $P(\lambda')$ для $\lambda' \in [\lambda, \lambda_+(x^\lambda)]$.

Далее, из (8) и (11) следует $\nabla_i^- F(x^\lambda, \lambda) \geqslant 0$ $\forall i \in \mathrm{fes}_+^-(x^\lambda, D)$ $\forall \lambda' \in [\nu_-(x^\lambda), \lambda]$, а для $\forall i \in \mathrm{fes}^+(x^\lambda, D) \setminus \mathrm{fes}_+^-(x^\lambda, D)$ имеем $\nabla_i^+ g(x^\lambda) \leqslant \leqslant 0$. Отсюда для $\lambda' \in [\lambda_-(x^\lambda), \lambda]$ из (11) следует $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda') = \Delta_i^- F(x^\lambda, \lambda) + (\lambda' - \lambda) \nabla_i^- g(x^\lambda) \geqslant 0$. Таким образом, условие (1) критерия оптимальности выполняется для точки x^λ и параметра λ'. Аналогично доказывается выполнение условий (2), (3). Откуда следует оптимальность решения x^λ задачи $P(\lambda')$ для $\lambda' \in [\lambda_-(x^\lambda, \lambda)]$.

б) Если $\lambda_-(x^\lambda) > 0$, то из (8) и определений $\lambda_-^i(x^\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, следует, что $\lambda_-(x^\lambda)$ вычислен по одной из формул (4), (5), (6). Рассмотрим случай, когда $\lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^1(i^*, x^\lambda)$. В двух остальных случаях доказательство аналогично. Имеем $\lambda_-^1(i^*, x^\lambda) = -\nabla_i^+ f(x^\lambda) / \nabla_i^+ g(x^\lambda)$ или $\nabla_i^+ f(x^\lambda) + \lambda_-(x^\lambda) \nabla_i^+ g(x^\lambda) = 0$. Отсюда $F(x_-^\lambda, \lambda_-(x^\lambda)) = F(x^\lambda, \lambda_-(x^\lambda)$. Но мы только что доказали (случай а): x^λ — оптимальное решение задачи $P(\lambda_-(x^\lambda))$. Таким образом, x_-^λ также оптимальное решение задачи $P(\lambda_-(x^\lambda))$.

Часть в) доказывается аналогично части б).

3. Из теоремы вытекает алгоритм вычисления λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$; x^i, $i = 1, \ldots, N + 1$.

Алгоритм 1.

1) Найдем оптимальное решение x^1 задачи $P(0)$. Положим $k := 1$, $\lambda_0 := 0$.

2) Если $\nabla_i^- g(x^k) \geqslant 0$ $\forall i \in \mathrm{fes}^-(x^k, D)$, то $\lambda_k = \infty$ и перейти к 3, иначе вычислить $\lambda_-^1(x^k)$ и положить $\lambda_k = \lambda_-^1(x^k)$.

3) Если $\nabla_i^- g(x^k) \geqslant 0$ $\forall i \in \mathrm{fes}^-(x^k, D)$, то перейти к (4), иначе вычислить $\lambda_-^2(x^k)$ и положить $\lambda_k = \lambda_-^2(x^k)$ при $\lambda_k > \lambda_-^2(x^k)$.

4) Если $\nabla_{ij}^{+-} g(x^k) \geqslant 0$ $\forall i, j \in \mathrm{fes}^{+-}(x^k, D)$, то перейти к 5, иначе вычислить $\lambda_-^3(x^k)$ и положить $\lambda_k = \lambda_-^3(x^k)$ при $\lambda_k > \lambda_-^3(x^k)$.

5) Если $\lambda_k < \infty$, то x^{k+1} определяется по формуле (9). Положить $k := k + 1$ и перейти к 2.

4. Рассмотрим задачу дробно-выпуклой дискретной оптимизации:

$$\min\left\{\frac{f(x)}{g(x)}:\ x \in D \leqslant Z_+^n\right\}, \tag{12}$$

где $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$, $g(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)$, $f_j(\cdot)$, $-g_j(\cdot)$ — выпуклые функции, принимающие только положительные значения на D; D — координатно-выпуклое множество в Z_+^n.

Принцип параметризации [3]. Задача (12) эквивалентна нахождению корня уравнения

$$\psi(\lambda) = 0, \tag{13}$$

где значение функции $\psi(\lambda)$ вычисляется в точке λ в результате решения следующей задачи: $Q(\lambda): \psi(\lambda) = \min\{Z(x, \lambda): x \in D\}$, где $Z(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$.

В силу положительности функций $f(x)$, $g(x)$ на D корень уравнения (13) также положителен. Поэтому достаточно рассмотреть только случай $\lambda > 0$. Здесь из-за вогнутости $g(x)$ и выпуклости f задача $Q(\lambda)$ относится к классу задач, рассмотренных в 2.

Принцип параметризации позволяет по каждому методу решения уравнения (13) строить метод решения задачи (12). Когда функции $f(x)$ и $g(x)$ линейны, для решения задачи (13) предложены последовательный, дихотомический, параметрический методы и методы, основанные на их сочетании [3—5]. Однако когда $f(x)$ и $g(x)$ нелинейны, для задачи (12) предложены лишь последовательный и дихотомический методы [4, 5]. На основании полученного результата для задачи (12) можно разработать параметрический метод, который заключается в следующем. Сначала для задачи $Q(\lambda)$ найти все точки излома $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ функции $\psi(\lambda)$. Затем, аналогично [5], применив дихотомию по индексам этих точек, можно получить оптимальное решение задачи (12), решив не более $[\log_2 N]+1$ задач типа $Q(\lambda)$. Обычно для нахождения всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ требуется много времени (пропорционально числу N). Поэтому при решении задачи (12) эффективно сочетать параметрический метод с последовательным или дихотомическим методами. В качестве примера ниже излагается метод, основанный на сочетании параметрического и дихотомического методов.

Алгоритм 2.

0) Найдем оптимальное решение x^1 задачи $Q(0)$. Положим $\underline{\lambda} = 0$, $\bar{\lambda} = f(x^1)/g(x^1)$.

1) Положим $\lambda := (\underline{\lambda} + \bar{\lambda})/2$. Найти оптимальное решение x^λ задачи $Q(\lambda)$. Если $\psi(\lambda)=0$, то перейти к 4. Если $\psi(\lambda)>0$, найти $\lambda_+(x^\lambda)$ по формуле (7) и перейти к 2. Если $\psi(\lambda)<0$, найти $\lambda_-(x^\lambda)$ по формуле (8) и перейти к 3.

2) Если $Z(x^\lambda, \lambda_+(x^\lambda)) \leqslant 0$, то перейти к 4; иначе положить $\underline{\lambda} = \lambda_+(x^\lambda)$ и перейти к 1.

3) Если $Z(x^\lambda, \lambda_-(x^\lambda)) \geqslant 0$, то перейти к 4; иначе положить $\bar{\lambda} = \lambda_-(x^\lambda)$ и перейти к 1.

4) Положим $x^* = x^\lambda$.

Теорема 2. Решение x^*, полученное алгоритмом 2, является оптимальным в задаче (13).

Список литературы

1. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987. С. 222.
2. Katoh N., Ibaraki T. // Discrete appl. Math. 1985. V. 10. P. 261.
3. Dinkelbach W. // Management Science. 1967. V. 13. P. 492.
4. Ctondran M. // EDF Bull. Direct. Etudes Recherches. Ser. C. Math. Informat. 1982. N 3. P. 49.
5. До Зуй Чинь. // Тр. национал. матем. конференц. Ханой, 1986. Т. 1. С. 80 (на вьетнамском языке).

Поступила в редакцию 25.02.88.

УДК 519.71.72

А. Н. МАЛЯРОВ, А. Н. ИСАЧЕНКО

ЛОГИЧЕСКАЯ СПЕЦИФИКАЦИЯ БЛОКИРОВКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

Одним из известных подходов к формальной спецификации и верификации взаимодействия процессов является рассмотрение их в терминах математической логики. Определенное свойство выражается логической формулой и проверяется путем ее вывода из аксиом с помощью формальных правил. Достоинство такого подхода для описания и доказательства свойств протоколов информационных сетей (ИС) состоит в его высокой абстрактивности и гибкости [1, 2].

Для отражения будущих свойств процессов в модальных языках первого порядка вводятся операторы $\Box$ (всегда) и $\Diamond$ (однажды), а также правило образования: если ω — модальная формула, то $\Box\omega$ и $\Diamond\omega$ также являются модальными формулами. Формула вида $\Box\omega$ означает, что ω истинна для текущего и всех будущих состояний процесса, а формула $\Diamond\omega$, что ω истинна в текущем или же в некотором будущем состоя-