



УДК 530.12:530.145

А. А. СОКОЛЬСКИЙ, А. Я. БЕЛЯКОВА

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ И ДИПОЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ В ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ

Классическим релятивистским моделям частиц, обладающих собственными моментами, посвящена обширная литература (см., например, обзоры [1—3]). Среди методов построения подобных моделей можно выделить вариационный, примененный уже в основополагающей работе [4] и используемый в последующих публикациях, в частности [5—12]. Настоящая работа является развитием исследований [7, 10] и посвящена динамике пробной классической релятивистской частицы, имеющей, кроме обычных (масса, заряд), характеристики, связанные с ее ориентацией и собственным вращением. Рассмотрение проводится в рамках общей теории относительности; вариационный (лагранжев) формализм построен таким образом, что 4-вектор спина появляется непосредственно в процессе варьирования действия как соответствующая динамическая переменная. На основе развитого общего формализма получены конкретные динамические соотношения для модели частицы, обладающей спином, дипольными (магнитным и/или электрическим) моментами, электрическим зарядом, движущейся в произвольных электромагнитном и гравитационном полях, причем рассмотрены два варианта — с изменяющимся и постоянным по модулю спином.

Движение частицы будем описывать с помощью функций $\xi^\alpha(\tau)$ и $e^\alpha_k(\tau)$ ($\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$; $i, j, \dots = 1, 2, 3$) так, что $x^\alpha = \xi^\alpha(\tau)$ задает ее мировую линию ($x^\alpha = (ct, x^i)$; $c=1$; $d\tau = \sqrt{-g_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta}$; $g_{\alpha\beta}(x^\lambda)$ — метрический тензор), а тройка ортонормированных чисто пространственных в системе покоя частицы 4-векторов e^α_k — ее ориентацию. Это означает,

что должны выполняться условия

$$e^\alpha_i e_\alpha = \delta_{ij}, \quad u_\alpha e^\alpha = 0, \quad (1a)$$

где $u^\alpha = d\xi^\alpha/d\tau$ — 4-скорость частицы. Очевидно,

$$u^\alpha u_\alpha = -1. \quad (1b)$$

Определим теперь угловую скорость собственного вращения частицы, вводя 4-псевдовектор

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2} [e \wedge \dot{e}]^\alpha. \quad (2)$$

Здесь и далее по любым повторяющимся индексам подразумевается суммирование и используются следующие обозначения:

а) для произведений: 4-скалярного $(a \cdot b) = a^\alpha b_\alpha$, $a^2 = (a \cdot a)$; «собственного» 4-векторного $[a \wedge b]^\alpha = F^{\alpha\beta\gamma\lambda} a_\beta b_\gamma u_\lambda$, где $F^{\alpha\beta\gamma\lambda} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$; $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ антисимметричен по всем индексам, $\varepsilon^{0123} = 1$; $g = \det \|g_{\alpha\beta}\|$;

б) для дифференциальных операций: ∇_α — ковариантная производная; D — абсолютный дифференциал, причем если $\dot{f} = f(A, B)$, где $A = A(x^\alpha)$, $B = B(\tau)$, то, по определению,

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial A} \nabla_\alpha A; \quad \frac{Df}{d\tau} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial A} u^\lambda \nabla_\lambda A + \frac{\partial f}{\partial B} \frac{DB}{d\tau}.$$

Выбор (2) в качестве 4-угловой скорости обоснован тем, что, как можно проверить, ω^i , вычисленные в системе покоя частицы, переходят в нерелятивистском пределе в компоненты обычной угловой скорости, а уравнение $\omega^\alpha = 0$ эквивалентно условию переноса векторов e^α_k по Ферми — Уолкеру [13], обобщающему понятие поступательного движения на релятивистский случай. Отметим также, что вектор ω^α (2) связан с тензором угловой скорости $\omega^{\alpha\beta}$ [7, 10] соотношениями $\omega^\alpha = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\lambda} \omega_{\beta\gamma} u_\lambda$, $\omega^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\lambda} \omega_{\gamma\lambda} u_\alpha$ и в силу своего определения ортогонален 4-скорости: $\omega^\alpha u_\alpha = 0$.

Для построения достаточно общих динамических соотношений на основе вариационного принципа зададим интеграл действия частицы в следующем виде:

$$S = \int L(u^\alpha, e^\alpha_k, \omega^\alpha, Q, g_{\alpha\beta}) d\tau, \quad (3)$$

где $Q(x^\alpha)$ — внешние поля (кроме гравитационного), не конкретизируя на этом этапе функцию Лагранжа, и проварьируем мировую линию и собственное вращение частицы. Возникающие при этом ковариантные [14] вариации величин $d\tau$, u^α и e^α_k , совместные со связями (1), как можно убедиться, имеют вид:

$$\delta(d\tau) = -(u \cdot \varepsilon) d\tau, \quad \delta u^\alpha = n^\alpha_\beta \varepsilon^\beta, \quad \delta e^\alpha_k = (e \cdot \varepsilon) u^\alpha + [\zeta \wedge e]^\alpha_k, \quad (4)$$

где $n^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta$; $\varepsilon^\alpha = \delta \xi^\alpha$; ξ^α — четыре не зависящих друг от друга и от e^α параметра инфинитезимального поворота триады e^α_k . Далее, с помощью (4) и принимая во внимание правила перестановки ковариантных производных в римановой геометрии, для ковариантной вариации (2) получим:

$$\delta \omega_\alpha = n^\lambda_\alpha \dot{\xi}_\lambda + (\zeta \cdot u) u_\alpha + [\zeta \wedge \omega]_\alpha + [\varepsilon \wedge u]_\alpha + (\varepsilon \cdot u) \omega_\alpha + (\varepsilon \cdot \omega) u_\alpha + \dot{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda} u^\beta u^\gamma \varepsilon^\lambda,$$

причем $\dot{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\mu\nu}_{\gamma\lambda}$, где $R_{\mu\nu\gamma\lambda}$ — тензор римановой кривизны [13]. Наконец, вычисляя вариацию действия

$$\delta S = \int \{ \delta L + L \delta(d\tau) \}$$

и применяя принцип Гамильтона, приходим к следующей системе уравнений поступательного и вращательного движения:

$$\dot{P}_\alpha = F_\alpha, \quad \dot{M}_\alpha = T_\alpha, \quad (5a, б)$$

где обобщенный 4-импульс частицы

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} u^\lambda + \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda} \omega^\lambda - L \right) u_\alpha + \frac{\partial L}{\partial e^\lambda_k} u^\lambda e_{\alpha k} + \left[u \wedge \frac{\partial L}{\partial \omega} \right]_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda} u^\lambda \omega_\alpha; \quad (6)$$

обобщенный собственный 4-момент импульса (4-псевдовектор спина)

$$M_\alpha = n^\lambda_\alpha \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda}; \quad (7)$$

обобщенная 4-сила

$$F_\alpha = \frac{\partial L}{\partial Q} \nabla_\alpha Q + \dot{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda} u^\beta u^\gamma M^\lambda; \quad (8)$$

обобщенный 4-момент сил

$$T_\alpha = \left[\omega \wedge \frac{\partial L}{\partial \omega} \right]_\alpha + \left[\frac{e}{k} \wedge \frac{\partial L}{\partial e} \right]_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda} \dot{u}^\lambda u_\alpha. \quad (9)$$

Таким образом, выведены общие (т. е. без конкретизации лагранжиана) общерелятивистские динамические соотношения для некоторого класса моделей классической частицы со спином и, вообще говоря, темп или иными мультипольными моментами, взаимодействующей с произвольными внешними полями Q и $g_{\alpha\beta}$, собственное вращение которой описывается с помощью 4-векторных характеристик. При этом для 16 неизвестных функций $\xi^\alpha(\tau)$ и $e^\alpha_k(\tau)$ получилось 18 уравнений (1), (5). Однако, как можно проверить, в силу одних лишь связей (1) выполняются два, не зависящих друг от друга, равенства:

$$(M_\alpha - T_\alpha) u^\alpha = 0, \quad (P_\alpha - F_\alpha) u^\alpha + (M_\alpha - T_\alpha) \omega^\alpha = 0, \quad (10)$$

вследствие чего число независимых уравнений оказывается равным числу неизвестных. Если же переменные e^α_k явно в лагранжиан не входят, то соотношения (5), (16) и $\omega^\alpha u_\alpha = 0$ дают (с учетом (10)) восемь независимых уравнений для восьми неизвестных функций $\xi^\alpha(\tau)$ и $\omega^\alpha(\tau)$, и замкнутость системы по-прежнему имеет место.

Отметим также, что 4-вектор спина частицы M_α появляется в процессе варьирования в виде выражения (7) ортогонального 4-скорости и что, как и следует, развитый формализм нечувствителен к тождественным преобразованиям функции Лагранжа с помощью условий (1).

Переходя к конкретной модели релятивистской вращающейся заряженной частицы с дипольными моментами, примем в качестве функции Лагранжа выражение (см. [5, 7, 10]):

$$L = -\tilde{m}_0 + \frac{1}{2} I \omega^\alpha \omega_\alpha + q A_\alpha u^\alpha + \mu^\alpha H_\alpha + \eta^\alpha E_\alpha, \quad (11)$$

где $\tilde{m}_0$ — масса покоя; I — момент инерции; q — электрический заряд; $\mu^\alpha = \mu^\alpha + \mu^\alpha$, $\mu^\alpha = \kappa I \omega^\alpha$ — магнитный момент, обусловленный вращением ($\kappa = \text{const}$), $\mu^\alpha = \mu_k e^\alpha_k$ — гипотетический «вмороженный» магнитный момент ($\mu = \text{const}$); $\eta^\alpha = \eta_k e^\alpha_k$ — электрический момент ($\eta = \text{const}$); $E_\alpha = F_{\alpha\beta} u^\beta$, $H_\alpha = \tilde{F}_{\alpha\beta} u^\beta$, $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$, $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\gamma\lambda} F^{\gamma\lambda}$.

Подставляя функцию Лагранжа (11) в формулы (6) — (9), получаем

$$P_\alpha = \tilde{m} u_\alpha + q A_\alpha + [\mu \wedge E]_\alpha + [H \wedge \eta]_\alpha + [u \wedge M]_\alpha, \quad (12)$$

$$M_\alpha = I \omega_\alpha - \kappa I H_\alpha, \quad (13)$$

$$F_\alpha = q u^\lambda \nabla_\alpha A_\lambda + \mu^\lambda \nabla_\alpha H_\lambda + \eta^\lambda \nabla_\alpha E_\lambda + R_{\alpha\beta\gamma\lambda} u^\beta u^\gamma M^\lambda, \quad (14)$$

$$T_\alpha = [\mu \wedge H]_\alpha + [\eta \wedge E]_\alpha + (M \cdot u) u_\alpha, \quad (15)$$

где $\tilde{m} = \tilde{m}_0 + I \frac{\omega^2}{2} - (\mu \cdot H) - (\eta \cdot E)$.

Легко проверить, что для рассмотренной модели при наличии внешних полей ни ω^2 , ни M^2 не являются, вообще говоря, интегралами уравнений движения (5).

Можно, однако, для перехода к модели частицы с постоянным по модулю спином провести следующую процедуру. Во-первых, действуя по аналогии с [7], устремить $\omega \rightarrow \infty$, $I \rightarrow 0$, $\tilde{m}_0 \rightarrow -\infty$ с таким расчетом, чтобы величина $S_\alpha = I \omega_\alpha$ и перенормированная масса $m_0 = \tilde{m}_0 + M^2/2I$ остались конечными. В результате этого вместо (13) получим $M_\alpha = S_\alpha$, а в (12), (14) и (15) произойдут замены: $\tilde{m} \rightarrow m = m_0 - (\mu \cdot H) - (\eta \cdot E)$,

$M_\alpha \rightarrow S_\alpha$. Во-вторых, в рассматриваемом пределе в связи с тем, что $\omega \rightarrow \infty$, для 4-моментов μ^α и η^α естественно принять

$$\mu^\alpha = \kappa S^\alpha, \quad \eta^\alpha = \beta S^\alpha, \quad (16)$$

где κ — скалярная, а β — псевдоскалярная постоянные, характеризующие частицу. После этого спиновое уравнение, которое теперь примет вид

$$S_\alpha = (S \cdot u) u_\alpha + \kappa [S \wedge H]_\alpha + \beta [S \wedge E]_\alpha, \quad (17)$$

обеспечивает, очевидно, (с учетом условия $S_\alpha u^\alpha = 0$) выполнение требуемого соотношения $S^2 = \text{const}$.

Завершая построение модели частицы с постоянным по модулю спином, представим ее уравнения движения в следующем, удобном для анализа и приложений, виде:

$$m \frac{Du_\alpha}{d\tau} = q E_\alpha + \mu^\lambda \bar{\nabla}_\alpha H_\lambda + \eta^\lambda \bar{\nabla}_\alpha E_\lambda + \frac{\bar{D}}{d\tau} [S \wedge Y]_\alpha + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda} u^\beta u^\gamma S^\lambda, \quad (18)$$

$$\frac{\bar{D}S_\alpha}{d\tau} = [\mu \wedge H]_\alpha + [\eta \wedge E]_\alpha, \quad (19)$$

где $\bar{D}\{\}_\alpha = n_\alpha^\lambda D\{\}_\lambda$, $\bar{\nabla}_\alpha = n_\alpha^\lambda \nabla_\lambda$, $Y_\alpha = \dot{u}_\alpha - \kappa E_\alpha + \beta H_\alpha$.

Отметим, что преобразования, приводящие к (18), (19), существенно упрощаются, если воспользоваться тождествами:

$$\mu^\alpha \dot{H}_\alpha = \mu^\alpha u^\lambda \nabla_\lambda H_\alpha - u^\lambda \frac{D}{d\tau} [\mu \wedge E]_\lambda,$$

$$\eta^\alpha \dot{E}_\alpha = \eta^\alpha u^\lambda \nabla_\lambda E_\alpha - u^\lambda \frac{D}{d\tau} [\eta \wedge H]_\lambda.$$

Список литературы

1. Тернов И. М., Бордовицын В. А. // УФН. 1980. Т. 132. № 2. С. 345.
2. Багров В. Г., Бордовицын В. А. // Изв. вузов. Физика. 1980. № 2. С. 67.
3. Rowe E. G. P., Rowe G. T. // Phys. reports. 1987. V. 149. P. 287.
4. Frenkel J. I. // Zs. Phys. 1926. V. 37. P. 243.
5. Tamm I. E. // Zs. Phys. 1929. V. 55. P. 199.
6. Bartum P. C. // Proc. Roy. Soc. A. 1965. V. 284. P. 204.
7. Schild A., Schlosser J. A. // Journ. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1299.
8. Епихин Е. И. // Тез. докл. III Сов. гравит. конференц. Ереван, 1972. С. 63.
9. Bailey I., Israel W. // Commun. Math. Phys. 1975. V. 42 P. 62.
10. Минкевич А. В., Сокольскийкий А. А. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1975. № 4. С. 72.
11. Сокольскийкий А. А. // Гравитация и электромагнетизм: Сб. трудов Всесоюз. совещ. Минск, 1981. С. 101.
12. Minkevich A. V., Karakura F. // Journ. Phys. A. 1983. V. 16. P. 1409.
13. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963. С. 22.
14. Минкевич А. В., Федоров Ф. И. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1968. № 5. С. 53.

Поступила в редакцию 05.01.90.

УДК 537.533.7

А. А. МОСКОТЕЛЬНИКОВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СВЧ-ДИАПАЗОНА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Дифракция электромагнитных волн в кристаллах приводит к существенному изменению показателя преломления среды. Так, в двухволновом приближении показатель преломления имеет вид (см., например, [1]):

$$n = n_0 \pm \Phi(\alpha), \quad (1)$$

где n_0 — средний показатель преломления среды; $\Phi(\alpha)$ — некая функция от α , причем $\alpha = \vec{\tau}(\vec{\tau} + 2\vec{\kappa})c^2/\omega^2$, где $\vec{\tau}$ — фиксированный вектор обратной