$$\text{если } i < j,\ x_i = 1,\ x_j = 0 \text{ и } f(x) = 0, \text{ то } f(x + e_j - e_i) = 0, \quad (1)$$

где e_k — k-й единичный орт.

Предложение 1. Регулярная булева функция f удовлетворяет условию: если $i < j$, $x_i = 0$, $x_j = 1$ и $f(x) = 1$, то $f(x + e_i - e_j) = 1$.

Зададим на множестве точек слоя F_j частичный порядок $\prec$ следующим образом: $x \prec y$, $x, y \in F_j$, если $z(x) \geqslant z(y)$, где $z(a) = (z_1(a), z_2(a), \ldots, z_j(a))$ — вектор, i-я координата которого равна номеру координаты i-й единицы вектора $a \in E^n$.

Предложение 2. Если $x \prec y$, $x, y \in F_j$, то для регулярной булевой функции f выполняется $f(x) \leqslant f(y)$, т. е. регулярная функция f обладает свойством монотонности на слое F_j относительно порядка $\prec$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $x \prec y$, $x, y \in F_j$ и $f(y) = 0$, то $f(x) = 0$. Из определения $z(x) \geqslant z(y)$. Следовательно, существует цепочка транспозиций вида (1) координат вектора y, приводящая к вектору x, т. е. $f(x) = 0$.

Исследуем структуру частично упорядоченного множества $(F_j, \prec)$. Будем рассматривать вместо $(F_j, \prec)$ изоморфное ему частично упорядоченное множество $D(F_j)$, где $D(F_j) = \{z(x) \mid x \in F_j\}$. Очевидно, что $D(F_j)$ есть подмножество элементов координатной решетки $M^j = \{(x_1, \ldots, x_j) \mid 1 \leqslant x_i \leqslant n, x_i$ — целое, $i = 1, \ldots, j\}$.

Предложение 3. Размерность множества $D(F_j)$ равна j, если $j \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ и $n - j$, если $j > \left[\frac{n}{2}\right]$. Здесь под размерностью множества $D(F_j)$ понимается размерность координатной решетки M^j.

Доказательство следует из того, что нулевые компоненты вектора $x \in E^n$ определяют единичные компоненты, и наоборот.

Предложение 4. Следующая система диофантовых неравенств задает множество $D(F_j)$:

$$z_{i+1} - z_i > 0,\ i = 1, \ldots, j-1;\ i \leqslant z_i \leqslant n - j + i,\ z_i \text{ — целые, } i = 1, \ldots, j.$$

Свойство монотонности регулярной булевой функции f на $(F_j, \prec)$ позволяет построить эффективный алгоритм для задачи поиска максимального верхнего нуля. Напомним, что точка $x^0 \in E^n$ называется верхним нулем монотонной булевой функции f, если $f(x^0) = 0$, а для всех y таких, что $x^0 \leqslant y$ и $x^0 \neq y$, выполняется $f(y) = 1$. Точка x^0 называется максимальным верхним нулем f, если $f(x^0) = 0$ и для $y \in E^n$, из того, что $f(y) = 0$, следует, что $\|y\| \leqslant \|x^0\|$.

Для того чтобы определить, есть ли нулевое значение функции f на слое F_j, достаточно вычислить значение функции в минимальном элементе множества $(F_j, \prec)$. Нетрудно заметить, что минимальные элементы множеств $(F_j, \prec)$, $j = 0, \ldots, n$ образуют цепь в E^n относительно естественного порядка $\leqslant$ и, следовательно, справедлива

Теорема. Максимальный верхний нуль монотонной регулярной булевой функции f: $E^n \to \{0, 1\}$ может быть найден за $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ вычислений значения функции.

Поступила в редакцию 01.12.88.

УДК 517.544

Н. В. БРОВКА

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА

Пусть $L = L_1 \cup L_2 = \left]-\frac{1}{k}, -1\right[\cup \left]1, \frac{1}{k}\right[$, $0 < k < 1$, $D = \mathbf{C} \setminus L$. Рассмотрим задачу: найти вектор $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ кусочно-голоморфный в D, ограниченный в окрестности концов L, предельные значения которого удовлетворяют краевому условию:

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t), \qquad (1)$$

где $G(t)$ — подстановочная матрица следующего вида:

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in L_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & t \in L_2. \end{cases}$$

Эта задача рассматривалась О. Джураевым [1], но не была решена до конца.

С помощью S-преобразования [2]:

$$S = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, задача (1) сводится к задаче:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(t) \\ \Phi_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(t) \\ \Phi_2^-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in L_1, \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(t) \\ \Phi_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(t) \\ \Phi_2^-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in L_2;$$

$$\Phi_3^+(t) = \Phi_3^-(t), \quad t \in L, \qquad (3)$$

где введено обозначение $\Phi(z) = S \circ \varphi(z)$.
Рассмотрим следующие вспомогательные задачи:

$$\psi_1^+(t) = G_1(t)\,\psi_1^-(t), \quad G_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in L_1 \\ \alpha^{3/2}, & t \in L_2, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\psi_2^+(t)\,\psi_2^-(t) = G_2(t), \quad G_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in L_1 \\ \alpha^{-1/2}, & t \in L_2. \end{cases} \qquad (5)$$

Предположим, их решения существуют, и введем, вообще говоря, мероморфную матрицу

$$Z(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x(z)\,\psi_1(z)\,\psi_2(z) & \psi_1(z)\,\psi_2(z) \\ -\frac{1}{2}x(z)\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} & \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $x(z) = \frac{1}{k}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$.

Прямой подстановкой можно проверить, что $Z(z)$ удовлетворяет краевому условию (2). Ограниченное решение задачи (4) имеет вид:

$$\psi_1(z) = \sqrt{(z-1)\left(z-\frac{1}{k}\right)}. \qquad (7)$$

Задача (5) в классе функций, ограниченных в окрестности концов и не обращающихся в 0 в D, неразрешима. Она разрешима в классе функций, имеющих один нуль в точке z_1, которая находится из следующей проблемы обращения Якоби:

$$\int_{(0,1)}^{(z_1, w_1)} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = -\frac{k}{3}\int_{(1,0)}^{\left(\frac{1}{k},0\right)} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} + 4mK + 2niK',$$

где K, K' — эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра.

Решением проблемы обращения, когда $m=0$, $n=0$, будет точка с координатами: $z_1 = \operatorname{sn}\left(-\frac{k}{3}K'\right)$, $w_1 = \operatorname{cn}\left(-\frac{k}{3}K'\right)\operatorname{dn}\left(-\frac{k}{3}K'\right)$. Тогда решение задачи (5) в классе ограниченных функций, обращающихся в 0 в точке z_1, дается формулой [3]:

$$\psi_2(z) = \exp\left\{\frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{3kK_i}K' + k\int_0^z \left(\frac{w_1}{\tau - z_1} - \frac{\pi}{3}K'\tau^2 - A\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\tau^2k^2)}} + c\right\},$$

где A — A-период абелева интеграла $\int\limits_0^z \frac{w_1}{\tau - z_1}\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$; c—произвольная константа.

Перепишем матрицу (6) в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x(z)\psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1) & \psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1) \\ -\frac{1}{2}x(z)\frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1)} & \frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1)} \end{pmatrix},$$

где $\psi_2(z) = \tilde{\psi}_2(z)(z-z_1)$ и $\tilde{\psi}_2(z) \neq 0$. Для того чтобы избавиться от полюсов, нулей элементов матрицы (9) и привести ее к каноническому виду, умножим ее справа на матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z-z_1} & -\frac{z}{z_1 x(z_1)(z-z_1)} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x(z_1)}{z-z_1} - \frac{1}{k}\right) & \frac{1}{2}\frac{(z-z_1)^2(z+z_1)-z}{(z-z_1)z_1} \end{pmatrix}.$$

В результате получим:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)\left[x(z) - x(z_1) - \frac{1}{2k}(z-z_1)^2\right] & \frac{1}{2}\psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)\left[\frac{z\,x(z)}{z_1 x(z_1)} - \frac{z}{z_1} + (z-z_1)^2\left(2 - \frac{z}{z_1}\right)\right] \\ -\frac{1}{2}\frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)}\left[\frac{x(z)+x(z_1)((z-z_1)^2-1)}{(z-z_1)^2} - \frac{1}{k} - x(z_1)\right] & \frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)}\left[-\frac{1}{2}\frac{x(z)+x(z_1)((z-z_1)^2-1)}{(z-z_1)^2 x(z_1)}\times\frac{z}{z_1} + 1\right] \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Порядки ее столбцов на бесконечности равны: —2, —2, и их сумма равна порядку определителя. Тогда матрица

$$X = \begin{pmatrix} M & \vdots & 0 \\ \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

удовлетворяет краевым условиям (2), (3), а произведение $S^{-1}X$ является канонической матрицей исходной задачи (1). Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение. Каноническая матрица задачи (1) имеет вид $S^{-1}X$, где X определяется формулой (10), а решения $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ задаются выражениями (7), (8).

З а м е ч а н и е. Используя теорию неоднородной задачи Римана, нетрудно выписать условия ее разрешимости.

Список литературы

1. Джураев О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 1. С. 57.
2. Круглов В. Е. // Сиб. матем. журн. 1981. № 6. С. 87.
3. Чаевский Г. Г. Нелинейные краевые задачи теории аналитических функций на конечных римановых поверхностях: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984. 16 с.

Поступила в редакцию 30.12.88.

УДК 517.977

Н. В. ХРИТОНЕНКО

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГАМИЛЬТОНИАНА В ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В классе допустимых управлений $u(t)$, $t \in T = [0, t^*]$, рассмотрим задачу

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \to \min; \ \dot{x} = f(x) + Bu, \ x(0) = x_0; \ b_* \leqslant u(t) \leqslant b^*, \ t \in T, \quad (1)$$

$x = x(t) = x(I|t)$, $u = u(t) = u(J|t)$; $\varphi(\cdot)$, $f(\cdot) \in C^{(2)}$; $I = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{1, \ldots, r\}$. Градиент $\mathrm{grad}_u H(x, \varphi, u) = (\partial H/\partial u_j, \ j \in J)$ гамильтониана системы (1) $H(x, \psi, u) = \psi'(f(x) + Bu)$ вдоль допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, и соответствующих ему траекторий $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, прямой (1) и сопряженной

$$\dot{\psi} = -\partial f'(x(t))/\partial x \cdot \psi; \ \ \psi(t^*) = -\partial\varphi(x(t^*))/\partial x, \quad (2)$$

систем назовем коуправлением и обозначим $\Delta(t)$, $t \in T$.

Существует обширный класс задач (1), оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, которых релейно. При создании эффективных методов решения таких задач [1] возникает проблема удержания некоторых значений коуправления. В связи с этим представляет интерес изучение локальной управляемости гамильтониана.

На множестве T выберем совокупность точек $T_* = \{t_j, \ j \in Z\}$. Каждой точке t_j поставим в соответствие набор индексов K_j. Обозначим $K_* = \bigcup_{j \in L} K_j$; $\Delta u(t)$, $\Delta x(t)$, $\Delta\psi(t)$, $\rho(t)$, $t \in T$,— допустимые приращения управления, траектории, котраектории и коуправления.

Определение 1. При выбранном наборе $\{T_*, K_*\}$ динамическая система (1) локально управляема вдоль $u(t)$, $t \in T$, относительно гамильтониана, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для каждой совокупности $\omega = (\omega_l^j, \ l \in K_j, \ j \in L)$ существует такая функция $\Delta u(t, \omega, \varepsilon)$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполняются равенства:

$$\rho_l(t_j) = \varepsilon\,\omega_l^j, \ l \in k_j, \ j \in L. \quad (3)$$

Введем линеаризованную вдоль $u(t)$, $t \in T$, модель системы (1), (2):

$$\dot{\chi} = A(t)\,\chi + B\,\mu, \ \chi(0) = 0; \quad (4)$$

$$\dot{\zeta} = -A'(t)\,\zeta + D(t)\,\chi, \ \zeta(t^*) = -D_0(t^*)\,\chi(t^*); \quad (5)$$

где $A(t) = A(x(t))$, $A(x) = \partial f(x)/\partial x$, $D(t) = D(x(t), \psi(t))$,

$$D(x, \psi) = \psi'\,\partial^2 f'(x)/\partial x^2; \ D_0(t^*) = D_0(x(t^*)), \ D_0(x) = \partial^2\varphi(x)/\partial x^2.$$

При переносе определения 1 на систему (4) число ε_0 считается произвольным. Тогда можно говорить о глобальной или просто управляемости динамической системы (4) относительно гамильтониана $H(\varkappa, \zeta, \mu, t) = \zeta'(A(t)\varkappa + B\mu) - \varkappa' D(t)\varkappa/2$.

Теорема. Динамическая система (1) локально управляема вдоль функции $u(t)$, $t \in T$, относительно гамильтониана по совокупности $\{T_*, K_*\}$, если управляема ее линеаризованная модель.

Приведем схему доказательства теоремы в трех классах допустимых вариаций.