лучшему пониманию процессов и явлений в спиновой системе при воздействии на нее постоянного и переменного магнитных полей.

Поступила в редакцию 05.06.89.

*УДК 530.1 : 51-72*

*М. Н. СЕРГЕЕНКО*

# К АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

1. Известно, что решение уравнения Шредингера с центрально симметричным потенциалом (в частности, кулоновским) методом ВКБ приводит к правильным собственным значениям энергии, если в радиальном уравнении сделать замену Крамерса $l(l+1) \to \left(l+\frac{1}{2}\right)^2$. Трудность с членом, содержащим $l(l+1)$, состоит в том, что в квазиклассическом решении при $r \to 0$ возникает точка ветвления вида $R(r) \sim \frac{r^{\sqrt{l(l+1)}}}{\sqrt{r}}$, в то время как точное регулярное решение в этой точке $R(r) \sim r^l$ [1].

Замену Крамерса обосновал Лангер [2]. Однако аналогичная трудность возникает в квазиклассическом решении уравнения присоединенных полиномов Лежандра при $\vartheta \to 0$: $P_l^m(\vartheta) \sim \frac{\vartheta^{\sqrt{m^2-1/4}}}{\sqrt[4]{m^2-1/4}}$, в то время как точное регулярное решение $P_l^m(\vartheta) \sim \vartheta^{\pm m}$. Отсюда делают заключение о неприменимости квазиклассического приближения к уравнению присоединенных полиномов Лежандра.

Нетрудно заметить, что проблему регуляризации $P_l^m(\vartheta)$ в нуле решает замена $m^2-\frac{1}{4} \to \left(m+\frac{1}{2}\right)^2$, но она приводит, как будет показано ниже, к собственным значениям вида $\nu = j(j+1)$, $j = l+\frac{1}{2}$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$, отличным от известных $\nu = l(l+1)$, которые можно получить с помощью замены $m^2 - \frac{1}{4} \to m^2$ в рамках квазиклассического приближения. Таким образом, возникают альтернативные возможности, которые дают либо правильное поведение $P_l^m(\vartheta)$ в нуле с собственными значениями $\nu = j(j+1)$, $j = l+\frac{1}{2}$, либо приводят к собственным значениям вида $\nu = l(l+1)$ и нерегулярным поведением $P_l^m(\vartheta)$ в нуле при $m = 0$.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\nu Y=0. \quad (1)$$

Выполним разделение переменных в этом уравнении после исключения первой производной, что легко сделать с помощью преобразования

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{dy}{dx}\right)=\left(\sqrt{f}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{f}\right)(\sqrt{f}y). \quad (2)$$

Тогда получим два уравнения:

$$\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\left(\nu+\frac{1}{4}-\frac{\mu-1/4}{\sin^2\vartheta}\right)\right](\sqrt{\sin\vartheta}\,\Theta)=0, \quad (3)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}+\left(\mu-\frac{1}{4}\right)\right]\Phi=0, \quad (4)$$

из которых следует, что квадрат обобщенного импульса по переменной $\varphi$ есть $p_\varphi^2=\mu-\frac{1}{4}$, на что указывает также возможность представления (3), (4) в виде уравнения Гамильтона — Якоби $\left(\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2=$

$= \nu + \frac{1}{4}$, в котором обобщенные импульсы имеют вид $\frac{\partial S}{\partial \vartheta} =$
$= \left(-\frac{(\sqrt{\sin\vartheta}\,\Theta)''}{(\sqrt{\sin\vartheta}\,\Theta)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \left(-\frac{\Phi''}{\Phi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Уравнения (3), (4) есть уравнения Штурма — Лиувилля в каноническом виде

$$y'' + [\lambda - U(x)]y = 0. \tag{5}$$

Задача на собственные значения определена только тогда, когда сформулированы условия «регулярности» и граничные условия, которым должна удовлетворять функция $y$. Определим эти условия, исходя из следующих общих требований для решений в квантовой механике: 1) волновая функция и ее первые производные должны быть непрерывными и ограниченными функциями во всем пространстве; 2) в случае дискретного спектра ограниченное решение (если оно существует) должно обращаться в нуль экспоненциально на обоих концах интервала $(-\infty, \infty)$ [3].

Преобразуем уравнение (5) с помощью (2) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dX^2} + \left(1 - \frac{(\sqrt[4]{\lambda - U})''_{XX}}{\sqrt[4]{\lambda - U}}\right)\right]F = 0, \ F = \sqrt[4]{\lambda - U}\, y, \tag{6}$$

где $X = \int^{x} \sqrt{\lambda - U(x)}\, dx$. Квазиклассическое приближение справедливо, как известно, в том случае, если выполняется условие $\frac{(\sqrt{\lambda - U})'}{\lambda - U} \ll 1$. [3].

Поэтому в уравнении (6) $\frac{(\sqrt[4]{\lambda - U})''_{XX}}{\sqrt[4]{\lambda - U}} = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{\lambda - U})'}{\lambda - U}\right)'_X + \frac{1}{4}\left(\frac{(\sqrt{\lambda - U})'}{\lambda - U}\right)^2 \ll 1$,

и мы получаем уравнение

$$F''(X) + F(X) = 0, \ \lambda - U > 0 \tag{7}$$

и, соответственно, $F''(X) - F(X) = 0$ в области, где $\lambda - U < 0$.

Пусть уравнение $\lambda - U(x) = 0$ имеет два корня $x_1$, $x_2$. Потребуем, чтобы осциллирующее решение уравнения (7) непрерывно с непрерывной производной переходило в точках $X_1 = X(x_1)$, $X_2 = X(x_2)$ в экспоненциально затухающие решения в области, где $\lambda - U < 0$. Тогда получим непрерывное во всей области ограниченное решение для функции $F(X)$, условием существования которого является выполнение равенства

$$X_2 - X_1 = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

3. В случае уравнения (3) условие непрерывности (8) принимает вид:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta = \pi\left(n_\vartheta + \frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

где $\vartheta_1$, $\vartheta_2$ — корни уравнения $\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2\vartheta} = 0$. Переходя в (9) к новой независимой переменной $\alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}$, фазовый интеграл сводим к табличному:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta = \sqrt{\nu - \mu + \frac{1}{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}\, \frac{d\alpha}{\cos\alpha}, \tag{10}$$

где $k^2 = \left(\nu + \frac{1}{4}\right) \Big/ \left(\nu - \mu + \frac{1}{2}\right)$. После интегрирования получаем уравнение

$$\sqrt{\nu + \frac{1}{4}} = \sqrt{\mu - \frac{1}{4}} + n_\vartheta + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Альтернативные возможности для собственных значений уравнения (3) заключаются в выборе граничных условий для уравнения (4). Если использовать «условие квантования» $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$ (условие периодичности $\Phi(\varphi)$), то получим $\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}=m$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Подставив это значение $\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}$ в уравнение (11), будем иметь: $\nu = l(l+1)$, где $l=n_\vartheta+|m|$. Эти собственные значения совпадают с точными для уравнений (1), (3).

Однако граничные условия для уравнения (4) можно выбрать согласно требованиям 1), 2) п. 2, т. е. допустим, что осциллирующее решение $a\cos\left(\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}\varphi+\delta\right)$ уравнения (3) на интервале $[0, \pi]$ непрерывно переходит в точках $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$ в экспоненциально затухающие решения уравнения $\Phi''-\left(\mu-\frac{1}{4}\right)\Phi=0$ вне интервала $[0, \pi]$. В этом случае условие непрерывности (8) имеет вид $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}d\varphi=\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)$, откуда $\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}=m+\frac{1}{2}$. Подставив это значение $\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}$ в уравнение (11), будем иметь

$$\nu=j(j+1), \tag{12}$$

где $j=l+\frac{1}{2}$.

В квантовой механике уравнение (1) определяет собственные значения оператора углового момента: $\nu=l(l+1)$, где $l$ — орбитальное квантовое число. Тогда $j=l+\frac{1}{2}$ — квантовое число полного углового момента, а $1/2$ — спиновое квантовое число; $j$ — всегда полуцелое число.

### Список литературы


1. Пономарев Л. И. Лекции по квазиклассике. Киев, 1967.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., 1965.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974.


Поступила в редакцию 10.07.89.

*УДК 519.1*

*А. В. МОЩЕНСКИЙ*

## РЕГУЛЯРНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

В данной заметке исследуется свойство монотонности регулярных булевых функций. Класс регулярных функций является обобщением класса пороговых функций *.

Рассмотрим единичный $n$-мерный куб $E^n=\{\alpha\,|\,\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i\in\{0, 1\},\ 1\leqslant i\leqslant n\}$, $n\geqslant 1$ с заданным в нем отношением частичного порядка $\alpha\leqslant\beta$, $\alpha, \beta\in E^n$, если $\alpha_i\leqslant\beta_i$, $i=1, \ldots, n$. Нормой точки $\alpha\in E^n$ называется величина $\|\alpha\|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$. Множество $F_j\subseteq E^n$, состоящее из всех точек с нормой $j$, назовем $j$-ым слоем $E^n$.

Булева функция $f\colon E^n\to\{0, 1\}$ называется монотонной, если для любых $x, y\in E^n$ из того, что $x\leqslant y$ следует, что $f(x)\leqslant f(y)$. Монотонная булева функция $f$ называется регулярной, если она удовлетворяет следующему условию:

* Y. Crama. Discrete applied mathematics. 1987. V. 16. P. 79.