УДК 538 : 082/083

А. Е. ПРЯХИН, И. Р. МИНЬКО

НАБЛЮДЕНИЕ ПРЕЦЕССИИ СИСТЕМЫ ЯДЕРНЫХ СПИНОВ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ МЕТОДЕ РЕГИСТРАЦИИ ЯМР

При стационарном методе регистрация ЯМР энергия резонансного поля малой амплитуды подводится к образцу непрерывно и чтобы успевала восстановиться больцмановская разность населенностей и возможность резонансного поглощения энергии, необходимо периодически нарушать условия резонанса. Для этого на постоянное магнитное поле накладывается периодически изменяющееся со звуковой частотой поле модуляции, и резонансная линия проходится дважды за период модуляции.

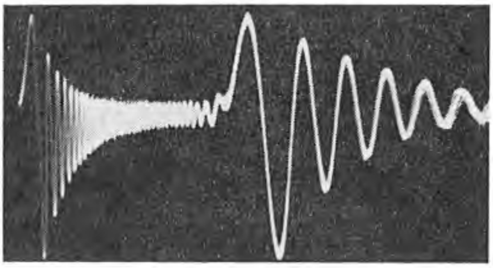

Рис. 1. Сигнал прецессии системы ядерных спинов в виде биений при стационарном методе регистрации (слева — при непрерывной, справа при «стоп-модуляции»)

Так как спиновая система инерционна, возникает эффект быстрого прохождения, называемый «виглями», или биениями. Биения возникают из-за существования в колебательном контуре с образцом двух вращающихся магнитных полей, частоты которых мало отличаются друг от друга. Одно из этих полей создается резонансным полем, а другое — прецессией системы ядерных спинов. Складываясь, эти близкие по частотам переменные поля обусловливают наблюдаемые биения [1].

При непрерывной модуляции частота биений увеличивается в связи с тем, что после резонанса из-за изменения поля модуляции происходит изменение результирующего магнитного поля, действующего на образец. Так как частота биений увеличивается, а полоса пропускания усилителя ограничена, на спад биений влияют постоянная времени поперечной релаксации T_2^*, а также полоса пропускания усилителя. Поэтому для биений с переменной частотой сложно, даже ориентировочно, определять время поперечной релаксации T_2^*.

Чтобы избежать влияния полосы пропускания усилителя на спад биений, требуется стабилизировать частоту биений. Для этого результирующее магнитное поле, действующее на спиновую систему, не должно изменяться из-за поля модуляции и оставаться постоянным в течение времени, большего T_2^*. Добиться этого можно остановкой поля модуляции после прохождения через резонанс. При «стоп-модуляции» резонанс наблюдается в постоянном магнитном поле; частота биений постоянна, и спад их амплитуды происходит с постоянной времени T_2^* (рис. 1). При этом конечность полосы пропускания усилителя на спад биений не влияет.

«Стоп-модулятор» (рис. 2) может быть использован в качестве приставки к серийному измерителю магнитной индукции Ш1-1 для наблюдения в постоянном магнитном поле свободной прецессии системы ядерных спинов в виде биений при стационарном методе регистрации ЯМР и измерения по спаду биений времени поперечной релаксации T_2^*.

Описанный метод наблюдения сигналов ядерного магнитного резонанса используется в лабораторном практикуме по магниторезонансной спектроскопии. На наш взгляд, введение этого упражнения способствует

[1] А. Леше. Ядерная индукция. Пер. с нем. / Под ред. П. М. Бородина. 1963. С. 73.

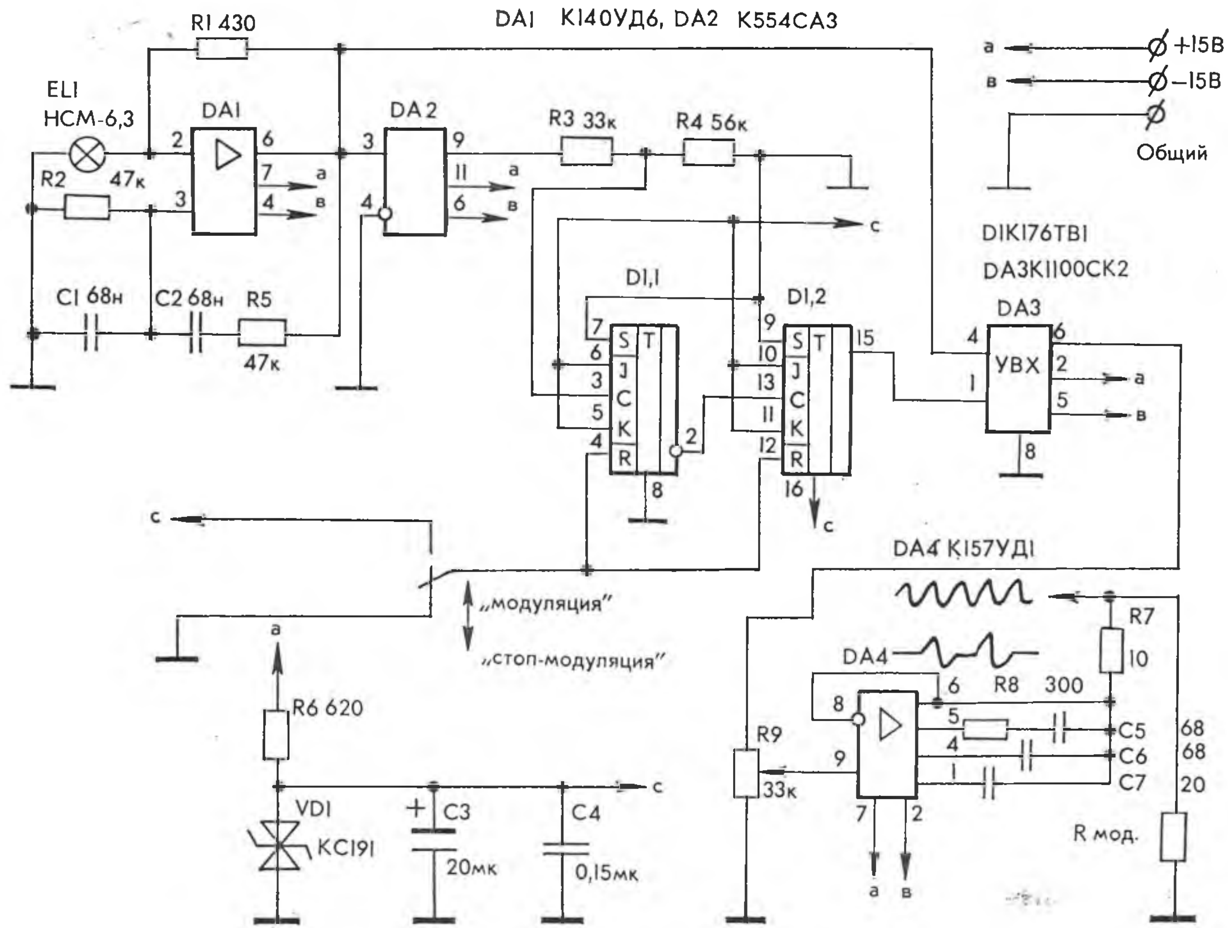

Рис. 2. Схема электрическая принципиальная «стоп-модулятора»

лучшему пониманию процессов и явлений в спиновой системе при воздействии на нее постоянного и переменного магнитных полей.

Поступила в редакцию 05.06.89.

УДК 530.1 : 51-72

М. Н. СЕРГЕЕНКО

К АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

1. Известно, что решение уравнения Шредингера с центрально симметричным потенциалом (в частности, кулоновским) методом ВКБ приводит к правильным собственным значениям энергии, если в радиальном уравнении сделать замену Крамерса $l(l+1)\to\left(l+\frac{1}{2}\right)^2$. Трудность с членом, содержащим $l(l+1)$, состоит в том, что в квазиклассическом решении при $r\to 0$ возникает точка ветвления вида $R(r)\sim\frac{r^{\sqrt{l(l+1)}}}{\sqrt{r}}$, в то время как точное регулярное решение в этой точке $R(r)\sim r^l$ [1].

Замену Крамерса обосновал Лангер [2]. Однако аналогичная трудность возникает в квазиклассическом решении уравнения присоединенных полиномов Лежандра при $\vartheta\to 0$: $P_l^m(\vartheta)\sim\frac{\vartheta^{\sqrt{m^2-1/4}}}{\sqrt[4]{m^2-1/4}}$, в то время как точное регулярное решение $P_l^m(\vartheta)\sim\vartheta^{\pm m}$. Отсюда делают заключение о неприменимости квазиклассического приближения к уравнению присоединенных полиномов Лежандра.

Нетрудно заметить, что проблему регуляризации $P_l^m(\vartheta)$ в нуле решает замена $m^2-\frac{1}{4}\to\left(m+\frac{1}{2}\right)^2$, но она приводит, как будет показано ниже, к собственным значениям вида $\nu=j(j+1)$, $j=l+\frac{1}{2}$, где $l=0, 1, 2, \ldots$, отличным от известных $\nu=l(l+1)$, которые можно получить с помощью замены $m^2-\frac{1}{4}\to m^2$ в рамках квазиклассического приближения. Таким образом, возникают альтернативные возможности, которые дают либо правильное поведение $P_l^m(\vartheta)$ в нуле с собственными значениями $\nu=j(j+1)$, $j=l+\frac{1}{2}$, либо приводят к собственным значениям вида $\nu=l(l+1)$ и нерегулярным поведением $P_l^m(\vartheta)$ в нуле при $m=0$.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\nu Y=0. \qquad (1)$$

Выполним разделение переменных в этом уравнении после исключения первой производной, что легко сделать с помощью преобразования

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{dy}{dx}\right)=\left(\sqrt{f}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{f}\right)(\sqrt{f}y). \qquad (2)$$

Тогда получим два уравнения:

$$\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\left(\nu+\frac{1}{4}-\frac{\mu-1/4}{\sin^2\vartheta}\right)\right](\sqrt{\sin\vartheta}\,\Theta)=0, \qquad (3)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}+\left(\mu-\frac{1}{4}\right)\right]\Phi=0, \qquad (4)$$

из которых следует, что квадрат обобщенного импульса по переменной φ есть $p_\varphi^2=\mu-\frac{1}{4}$, на что указывает также возможность представления (3), (4) в виде уравнения Гамильтона — Якоби $\left(\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2=$