Краткие сообщения

УДК 530.12

Е. А. УШАКОВ

ТОМАСОВА ПРЕЦЕССИЯ КАК ДВИЖЕНИЕ ВЕКТОРА, АССОЦИИРОВАННОЕ С ЦИКЛОМ, ПРИ ПЕРЕНОСЕ ПО ФЕРМИ

Посредством определения развертки и наложения касательного пространства самого на себя вдоль цикла по Ферми и Ферми — Уолкеру получена формула для движения вектора, ассоциированного с циклом, при переносе его по бесконечно малому замкнутому контуру по Ферми и Ферми — Уолкеру [1]. Эта формула обобщает известное выражение для изменения вектора при параллельном переносе его вдоль инфинитезимального цикла [2].

Вводя естественные обозначения, имеем:

$$dV^{\lambda}_{\text{Ф—У}} = dV^{\lambda}_{\parallel} + dV^{\lambda}_{\text{Ф—У, ост}}, \tag{1}$$

$$dV^{\lambda}_{\text{Ф}} = dV^{\lambda}_{\parallel} + dV^{\lambda}_{\text{Ф, ост}}, \tag{2}$$

где

$$dV^{\lambda}_{\parallel} = R^{\lambda}_{\mu\nu\omega} V^{\mu} \oint x^{\nu}\, dx^{\omega}, \tag{3}$$

$$dV^{\lambda}_{\text{Ф—У, ост}} = A^{\lambda}_{\mu\nu\omega} V^{\mu} \oint x^{\nu}\, dx^{\omega}, \tag{4}$$

$$dV^{\lambda}_{\text{Ф, ост}} = B^{\lambda}_{\mu\nu\omega} V^{\mu} \oint x^{\nu}\, dx^{\omega}, \tag{5}$$

$$B_{\nu\omega} = (B^{\lambda}_{\mu\nu\omega}) = -\varepsilon_0 \nabla_{\nu} (\overline{A} \nabla_{\omega} \underline{A}) - \overline{A} (\nabla_{\nu} \underline{A}) \overline{A} (\nabla_{\omega} \underline{A}), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} A_{\nu\omega} = (A^{\lambda}_{\mu\nu\omega}) &= B_{\nu\omega} + \overline{A} (\nabla_{\nu} \underline{A}) (\nabla_{\omega} \overline{A}) \underline{A} - \\ &- (\nabla_{\nu} \overline{A}) \underline{A} (\nabla_{\omega} \overline{A}) \underline{A} + \varepsilon_0 (\nabla_{\nu} \nabla_{\omega} \overline{A}) \underline{A}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\overline{A} = (A^{\nu}),\ \underline{A} = (A_{\nu}),\ \ \varepsilon_0 = A^{\nu} A_{\nu},\ A^{\nu} \equiv \frac{dx^{\nu}}{ds}, \tag{8}$$

В качестве приложения формулы (2) рассмотрим изменение вектора спина частицы при обносе его по Ферми вдоль бесконечно малого замкнутого контура.

Пусть частица со спином движется вокруг оси z в плоскости xy по окружности радиуса r с угловой скоростью ω; $v = \omega r$ — линейная скорость частицы. Пусть $S(t)$ — 4-вектор спина частицы, переносимый по Ферми: $S^{\alpha} A_{\alpha} = 0$. Найдем изменение спина $dS = S(T) - S(0)$ за период при условии, что $r \to 0$, т. е. 3-цикл бесконечно мал. 4-Траекторию частицы зададим следующим образом:

$$x = r \cos \omega t,\ y = r \sin \omega t,\ z = 0,\ t = t. \tag{9}$$

4-Скорость частицы $A^{\alpha}(t) = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\alpha}}{dt} = \gamma(-1, -r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0) = \gamma(-1, -\omega y(t), \omega x(t), 0)$. Гладкое продолжение $A^{\alpha}(t)$ на окрестность 4-траектории:

$$A^{\alpha}(x) = \gamma(-1, -\omega y, \omega x, 0). \tag{10}$$

Учитывая, что пространство-время плоское, для переноса Ферми имеем:

$$dS^{\alpha} = B^{\alpha}_{\mu\nu\rho} S^{\mu} \int_0^T x^{\nu} \, dx^{\rho}, \tag{11}$$

$$B_{\nu\rho} = (B^{\alpha}_{\mu\nu\rho}) = (\partial_{\nu}\bar{A})(\partial_{\rho}\underline{A}) - \bar{A}(\partial_{\nu}\underline{A})\bar{A}(\partial_{\rho}\underline{A}). \tag{12}$$

Отличной от нуля в рассматриваемом приближении оказывается лишь компонента

$$B^{2}_{112} = -\omega^2\gamma^2[1 - v^2\gamma^2]. \tag{13}$$

Отсюда

$$dS^2 = -\pi r^2 S^1(0)\,\omega^2\gamma^2[1 - v^2\gamma^2] \xrightarrow{v\to 0} -\pi v^2 S^1. \tag{14}$$

Угол поворота спина за период

$$\varphi = \frac{dS^2}{S^1} \approx -\pi v^2 \tag{15}$$

соответствует Томасовой прецессии [3]. Знак минус означает, что прецессия спина происходит в сторону, противоположную вращению частицы.

Список литературы

1. Ушаков Е. А. // Гравитация и электромагнетизм. Минск, 1987. С. 156.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1953. С. 507.
3. Thomas L. H. // Nature. 1926. V. 117. P. 514.

Поступила в редакцию 28.03.89.

УДК 534.23

А. К. БЕЛЯВСКИЙ, И. К. ДАНЕЙКО

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ КЛИНЕ. МЕТОД КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При определенной функциональной зависимости скорости звука $c(x, z)$ от горизонтальной и вертикальной координат метод конформного преобразования позволяет существенно упростить задачу нахождения акустического поля в неоднородном клине [1]. Данный подход неоднократно использовался при решении задач, моделирующих условия прибрежной зоны [2, 3]. При этом основное внимание уделялось двухмерным моделям и вид показателя преломления исследуемой среды не конкретизировался. Обобщим полученные ранее результаты на трехмерный случай при наличии в рассматриваемой области произвольного распределенного источника.

Нам предстоит решить уравнение Гельмгольца:

$$\triangle\Phi + k^2(x, y, z)\Phi = F(x, y, z) \tag{1}$$

при следующих условиях на поверхности ($z = -D$) и на границе раздела жидкость — твердое дно ($z = ax - D$):

$$\Phi|_{z=-D} = 0; \; \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{z=ax-D} = 0; \; \Phi \to 0, \begin{array}{l}|x| \to \infty,\\ |y| \to \infty,\end{array} \tag{2}$$

где $k = \omega/c(x, y, z)$; c — скорость звука; a — постоянная, определяющая угол наклона дна. Пусть функция $C(x, z)$, аппроксимирующая c, имеет вид, предложенный в [1]. Предположим также, что изменение скорости звука вдоль оси Oy незначительно и им можно пренебречь. Таким образом, в нашем случае волновое число k является функцией только двух переменных.