УДК 519.712.2

М. К. БУЗА, В. А. МОЩЕНСКИЙ

О МОЩНОСТИ ОДНОГО МНОЖЕСТВА ПРОГРАММ

В работе оценивается мощность одного подкласса программ на алгоритмическом языке. Этот подкласс характеризуется тем, что в правой части оператора присваивания могут находиться только арифметические выражения, построенные из переменных, цифр 1, 2, ..., 9 и имеющихся в языках типа ПЛ/1 пяти арифметических операций [1. С. 40]; такие арифметические выражения назовем субарифметическими. Кроме того, в этом подклассе программ любые логические формулы строятся только из субарифметических выражений с помощью восьми операций сравнения [1. С. 45]. Будем представлять такие программы в следующем виде [2. С. 207].

Программа состоит из входного вектора $\bar{x}^n=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, программного (внутреннего) вектора $\tilde{y}^m=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, вектора выходных переменных $\bar{z}^l=(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ и конечного ориентированного графа $G=(V, R)$, где V — конечное множество, а $R \subset V^2$, такого, что выполнены следующие три условия.

1. В графе G имеется ровно одна вершина $s \in V$, называемая стартовой, не являющаяся конечной вершиной никакого ребра; имеется ровно одна вершина $h \in V$, называемая конечной, которая не является начальной вершиной никакого ребра, и каждая вершина $v \in V$ находится на некотором пути от s к h.

2. Каждому ребру a, не входящему в h, поставлена в соответствие логическая форма (выражение [1]) $P_a(\bar{x}^n, \tilde{y}^m)$ и присваивание $\tilde{y}^m \leftarrow$ $\leftarrow f_a(\bar{x}^n, \tilde{y}^m)$; каждому ребру a, входящему в h,— выражение $P_a(\bar{x}^n, \tilde{y}^m)$ и присваивание $\bar{z}^l \leftarrow f_a(\bar{x}^n, \tilde{y}^m)$.

3. Логические выражения, приписанные ребрам, исходящим из одной и той же вершины, таковы, что для всех значений переменных $\bar{x}^n$ и $\tilde{y}^m$ только одно из них истинно.

Из этого представления программы вытекают следующие свойства.

1°. Ориентированный граф (V, R) с двумя отмеченными вершинами состоит из одной компоненты связности и, значит, $\sqrt{|R|} \leqslant |V| \leqslant |R|+1$, ибо максимальное число ребер будет тогда, когда $|R|=|V|^2$.

2°. Число ребер в графе (V, R) равно числу присваиваний в программе.

Теперь ясно, что верхняя оценка количества программ может быть получена, если известны следующие величины.

1. $S(m, r)$ — число неизоморфных связных ориентированных графов с m вершинами и r ребрами, где, согласно 1°, $\sqrt{r} \leqslant m \leqslant r+1$, в которых выбраны стартовая и конечная вершины.

2. Число $A(k, d)$ субарифметических выражений в языке ПЛ/1 от k переменных длины d*).

3. Число $L(k, d)$ логических выражений в языке ПЛ/1 от k переменных, образованных из субарифметических выражений длины не более d.

Сначала оценим $S(m, r)$ сверху. Известно [3. С. 192], что число $S'(m, r)$ неизоморфных графов, имеющих r неориентированных ребер, m вершин и одну компоненту связности, не превосходит $(8e)^{r+1}m^{r-m+1}$, т. е. $S'(m, r) \leqslant (8e)^{r+1} \cdot m^{r-m+1}$.

Ориентацию r ребер можно осуществить не более 2^r способами, а выбрать стартовую (или конечную) вершину из m вершин можно не более m способами. Следовательно,

$$S(m, r) \leqslant S'(m, r) \cdot 2^r \cdot m^2 \leqslant 2^r m^2 (8e)^{r+1} \cdot m^{r-m+1},$$

т. е.

$$S(m, r) \leqslant 2^r (8e)^{r+1} m^{r-m+3}, \tag{1}$$

*) Длиной арифметического выражения назовем число символов в его представлении в прямой польской записи.

где, согласно 1°, $\sqrt{r} \leqslant m \leqslant r + 1$.

Получим верхнюю оценку для H_a^b— числа сочетаний с повторениями. Используя $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, имеем

$$H_a^b = C_{a+b-1}^b = \frac{(a+b-1)!}{b!\,(a-1)!} = \frac{a\,(a+1)\,\ldots\,(a+b-1)}{b!} < \frac{(a+b-1)^b}{\left(\frac{b}{e}\right)^b} =$$

$$= e^b \left(\frac{b+a-1}{b}\right)^b = e^b \left(1 + \frac{a-1}{b}\right)^b \leqslant e^b \cdot e^{a-1}.$$

Итак,

$$H_a^b \leqslant e^{a+b-1}. \tag{2}$$

Оценим $A(k, d)$. Так как в языке ПЛ/1 имеется 5 арифметических операций [1. С. 40], а в субарифметических выражениях встречаются только переменные и 9 цифр (т. е. всего 14 знаков, не считая переменных), то $A(k, d) \leqslant (k+14)^d$. Значит,

$$A_0(k, d) = \sum_{i=1}^{d} A(k, i) \leqslant (k+14)^{d+1} \tag{3}$$

есть верхняя оценка числа субарифметических выражений в языке ПЛ/1 длины $\leqslant d$.

В рассматриваемом классе программ логические выражения строятся из субарифметических выражений, между двумя из которых ставится один из 8 знаков сравнения. Следовательно,

$$L(k, d) \leqslant ((k+14)^{d+1})^2 \cdot 8 = 8(k+14)^{2d+2}. \tag{4}$$

Через $P(n, m, l, d, q)$ обозначим число различных программ в описанном подклассе языка ПЛ/1, в которых имеется n входных переменных, m — внутренних, l — выходных, субарифметических операторов присваивания q и их длины не более d, а в логических выражениях используются субарифметические выражения длины не более d. Значит, в таких программах субарифметические выражения будут строиться из $n+m$ переменных, причем выбор внутренних переменных в этих выражениях может быть сделан не более чем m^q способами. Учитывая, что выбор выходных переменных может быть сделан не более чем 2^l способами, согласно отмеченному выше, имеем:

$$P(n, m, l, d, q) \leqslant m^q\, 2^l\, S(m_1, q) \cdot H^q_{A_0(n+m,\, d)} \cdot H^q_{L(n+m,\, d)},$$

где $\sqrt{q} \leqslant m_1 \leqslant q + 1$. Используя неравенства (1) — (4), получаем:

$$P(n, m, l, d, q) \leqslant m^q\, 2^l\, 2^q\, (8e)^{q+1} m_1^{q-m_1+3}\, e^{(m+n+14)^{d+1}+q-1} \times$$

$$\times e^{8\,(n+m+14)^{2d+2}} \leqslant m^q\, 2^{l+q}\, (8e)^{q+1}\, (q+1)^{q-\sqrt{q}+3}\, e^{9\,(n+m+14)^{2d+2}} + 2q - 2.$$

Итак,

$$P(n, m, l, d, q) \leqslant m^q\, 2^{l+q}\, (8e)^{q+1}\, (q+1)^{q-\sqrt{q}+3}\, e^{9\,(n+m+14)^{2d+2}} + 2q + 2. \tag{5}$$

Оказывается, в некоторых случаях неравенство (5) дает оптимальную (т. е. по порядку неулучшаемую) оценку числа соответствующих программ. Для этого рассмотрим программы, в которых каждому ребру приписана формула $\xi = a$ и присваивание $y \leftarrow \eta + \delta$, где $\delta \in \{1, 2, 3\}$; $\eta, a \in \{0, 1\}$. Такие программы представляют машины Тьюринга в алфавите $\{0, 1\}$, как это описано в [4. С. 90] (числа 1, 2, 3 означают здесь то, что 0, 1 и 2 в [4]). Значит, в этих программах $m = l = 1$, $d = 3$ (ибо 3 длина выражения $\eta + \delta$), а q равно числу внутренних состояний машины.

Можно убедиться, что, согласно неравенству (5), верхняя оценка величины $P(n, 1, 1, 3, q)$ при $q = \frac{2^n(1-\varepsilon)}{n}$ дает (как и неравенство (3.3) из

[4]) оптимальную оценку числа машин Тьюринга (при $k = 2$), вычисляющих булевы функции от n аргументов.

Следует отметить, что полученные оценки справедливы для любого алгоритмического языка, удовлетворяющего условиям, сформулированным в начале статьи. Язык ПЛ/1, в частности, удовлетворяет им.

Список литературы

1. Скотт Р., Сондак Н. ПЛ/1 для программистов. М., 1977.
2. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.
3. Лупанов О. Б. // Проблемы кибернетики. М., 1965. Вып. 14. С. 31.
4. Кузьмин В. А. Там же. Вып. 13. С. 75.

Поступила в редакцию 02.02.89.

УДК 532.59 : 539.3

О. М. ГЛАДУН

О НЕЛИНЕЙНЫХ СТОЯЧИХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости, на поверхности которой плавает тонкая упругая изотропная пластина толщиной h; ось x_1 совпадает с поверхностью раздела пластины и жидкости в невозмущенном состоянии, ось z_1 направлена вертикально вверх. Снизу жидкость ограничена горизонтальным дном $z_1 = -H_1$. Исследуем плоское движение жидкости, периодическое по горизонтальной координате x_1 (с периодом λ) и времени t_1 (с периодом τ).

Задача состоит в определении потенциала скорости φ^*, ординаты поверхности раздела пластины и жидкости ζ^* и частоты колебаний $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$. В безразмерных переменных задача имеет вид [1, 2]:

$$\Delta\varphi = 0,\ (-H \leqslant z \leqslant \varepsilon\zeta,\ |x| < \infty), \tag{1}$$

$$\zeta_t + \varepsilon\zeta_x\varphi_x = \varphi_z,\ z = \varepsilon\zeta, \tag{2}$$

$$D\frac{1}{\mu}\zeta_{xxxx} + \varkappa\zeta_{tt} + \varphi_t + \frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \frac{1}{\mu}\zeta = F(t),\ z = \varepsilon\zeta, \tag{3}$$

$$\varphi_z = 0,\ z = -H, \tag{4}$$

$$\zeta(x + 2\pi,\ t + 2\pi) = \zeta(x,\ t),\ \int_0^{2\pi}\zeta(x,\ t)\,\mathrm{dx} = 0, \tag{5}$$

$$x = kx_1,\ z = kz_1,\ t = \sigma t_1,\ H = kH_1,\ \varphi^* = \frac{\sigma}{k^2}\varepsilon\varphi,$$

$$\zeta^* = \frac{1}{k}\varepsilon\zeta,\ F^* = \frac{\varepsilon}{k^2}\sigma^2\rho F,\ \varepsilon = ak,\ \varkappa = \frac{\rho_1}{\rho}hk,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)\rho g}k^4,\ \mu = \frac{\sigma^2}{gk}.$$

Здесь E — модуль нормальной упругости пластины; ν — коэффициент Пуассона: ρ, ρ_1 — плотности жидкости и пластины соответственно; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; a — амплитуда линейной волны; ε — малый параметр. Функция $F^*(t)$ также подлежит определению.

Решение задачи ищем методом возмущений [1, 2]. Опуская промежуточные выкладки, с точностью третьего приближения находим (выписываем только выражения для определения профиля волны и частоты колебаний):

$$\zeta^* = \frac{\varepsilon}{k}[\cos x\cos t + \varepsilon(\beta_{22}\cos 2x\cos 2t + B\cos 2x) +$$