Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon > 0$ для ε-оптимальности в задаче (1)—(6) μ-управления $u(t)$, $t \in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры $M_{оп}$, при которой оценка субоптимальности опорного μ-управления $\{u(\cdot), M_{оп}\}$ удовлетворяла неравенству $\beta(u(\cdot), M_{оп}) \leqslant \varepsilon$.

Принцип ε-максимума. При любом $\varepsilon > 0$ μ-управление $u(t)$, $t \in T$, является ε-оптимальным управлением задачи (1)—(6) тогда и только тогда, когда существует такая опора $M_{оп}$, что вдоль опорного μ-управления $\{u(\cdot), M_{оп}\}$ и соответствующих ему идеальной траектории $x^*(t)$, $t \in T$ и решений $\psi(t)$, $t \in T$ сопряженной системы (7) выполняется принцип ε-максимума:

1) (условие $\varepsilon(\cdot)$— максимума):

$$\psi'(t) B(t) u(t) = \max_{u_* \leqslant u \leqslant u^*} \psi'(t) B(t) u - \varepsilon(t), \ t \in T,$$

2) (условие трансверсальности)

$$\nu_i h'_{(i)} x^*(t^*) = \max_{\alpha_i^- \leqslant w_i \leqslant \alpha_i^+} \nu_i w_i - \varepsilon_i, \ i \in I_{оп},$$

3) $\beta = \int_T \varepsilon(t)\, dt + \sum_{i \in I_{оп}} \varepsilon_i \leqslant \varepsilon.$

Поступила в редакцию 03.02.89.

УДК 514.76

Ю. Д. ЧУРБАНОВ

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА Ф-ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Пусть G — связная группа Ли с единицей e, Φ — ее аналитический автоморфизм, G^Φ — группа неподвижных точек автоморфизма Φ. Обозначим через M реализацию В. И. Ведерникова [1] однородного Φ-пространства G/G^Φ, через I — действие G на M [1].

$$I_g(x) = \Phi(g) x g^{-1}, \tag{1}$$

$x \in M$, $g \in G$. Пусть $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — алгебры Ли групп G и G^Φ соответственно, $\varphi = (d\Phi)_e$, $A = \varphi - id$, $\boldsymbol{m} = A\boldsymbol{g}$ — касательное пространство к M в единице e [2].

Предположим, что на M существует почти комплексная структура J_1. Она называется G-инвариантной, если для всех $g \in G$

$$dI_g \circ J_1 = J_1 \circ dI_g. \tag{2}$$

Обозначим через J сужение J_1 на $\boldsymbol{m}$.

Теорема 1. Предположим, что на M существует почти комплексная G-инвариантная структура J_1. Пусть ∇ — инвариантная аффинная связность пространства M, Γ — ее функция Вана [2]. Для того чтобы ∇ была почти комплексной связностью относительно J_1 (т. е. $\nabla J_1 = 0$), необходимо и достаточно, чтобы для всех $X \in \boldsymbol{g}$

$$J \circ \Gamma_X = \Gamma_X \circ J. \tag{3}$$

Доказательство. Если ∇ — почти комплексная связность, то из равенств $(\nabla_{X^*} J_1 \tilde{Y})_e = [X^*, J_1 \tilde{Y}]_e - \Gamma_X J \tilde{Y}_e$, $J(\nabla_{X^*} \tilde{Y})_e = J[X^*, \tilde{Y}]_e - J\Gamma_X \tilde{Y}_e = [X^*, J_1 \tilde{Y}]_e - J\Gamma_X \tilde{Y}_e$ имеем $J \cdot \Gamma_X = \Gamma_X \cdot J$. Обратно, рассмотрим связность $\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} = -J_1 \nabla_{\tilde{X}} J_1 \tilde{Y}$ с функцией Вана $\tilde{\Gamma}$. Тогда получаем:

$$\tilde{\Gamma}_X \tilde{Y}_e = -(\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{Y})_e + [X^*, \tilde{Y}]_e = J(\nabla_{X^*}, J_1 \tilde{Y})_e + [X^*, \tilde{Y}]_e =$$

$$= -J\,\Gamma_X J\,\tilde{Y}_e + J\,[X^*,\ J_1\tilde{Y}]_e + [X^*,\ \tilde{Y}]_e = \Gamma_X \tilde{Y}_e.$$

В силу совпадения функций Вана, имеем совпадение связностей.

Допустим теперь, что $\boldsymbol{g}$ обладает комплексной структурой J. Тогда на G существует биинвариантная почти комплексная структура $\tilde{J}$, кручение которой нулевое и $\tilde{J}_e = J$ [3].

Определение. Будем говорить, что почти комплексная структура $\tilde{J}$ индуцирует на M почти комплексную структуру, если на M существует G-инвариантная почти комплексная структура $\bar{J}$ такая, что $\tilde{J}_{|M} = \bar{J}$.

Отметим, что J индуцирует на M почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда $J(\boldsymbol{m}) \subset \boldsymbol{m}$.

Теорема 2. Пусть $\varphi \circ J = J \circ \varphi$. Тогда $\tilde{J}$ индуцирует на M почти комплексную структуру $\bar{J}$. Если M — регулярное Ф-пространство [2], то кручение [3] $\bar{J}$ нулевое.

Доказательство. В этом случае $A \circ J = J \circ A$, а значит, $J(\boldsymbol{m}) \subset \boldsymbol{m}$. Для доказательства второй части теоремы нужно заметить, что $J(\boldsymbol{h}) \subset \boldsymbol{h}$, а поэтому $J[X, Y]_{\boldsymbol{m}} = [X, JY]_{\boldsymbol{m}}$, $X, Y \in \boldsymbol{m}$.

Следствие. Если Ф — внутренний автоморфизм группы Ли G, то любая биинвариантная почти комплексная структура группы Ли G индуцирует на M почти комплексную структуру.

Ограничение J на $\boldsymbol{m}$ также обозначим через J.

Предположим, что Ф-пространство M допускает инвариантное N-оснащение [2]. В силу (2) получаем, что подпространство JN также будет задавать некоторое инвариантное JN-оснащение, которое будем называть J-сопряженным по отношению к инвариантному N-оснащению. Если $JN \subset N$, то инвариантное N-оснащение будем называть J-самосопряженным.

Теорема 3. Предположим, что инвариантное N-оснащение не является J-самосопряженным, а $\overset{\Phi}{G}$-связность [2] ∇ группы Ли G является почти комплексной связностью относительно $\tilde{J}$. Для того чтобы индуцированная ею связность [2] была почти комплексной связностью относительно $\bar{J}$, необходимо и достаточно, чтобы ∇ индуцировала одну и ту же связность вдоль инвариантных N- и JN-оснащений.

Доказательство. Условие того, что G^{Φ}-связность ∇ группы Ли G с функцией Вана Ψ является почти комплексной связностью относительно $\tilde{J}$, имеет вид: $J \circ \Psi_X = \Psi_X \circ J$, $X \in \boldsymbol{g}$. Обозначим через P оператор проектирования на $\boldsymbol{m}$ вдоль N, а через P_1 — оператор проектирования на $\boldsymbol{m}$ вдоль JN, $\Gamma = P\Psi$, $\Gamma^1 = P_1\Psi$. Тогда $P_1 = -JPJ$. Если связности совпадают, то $J \circ \Gamma_X = JP_1\Psi_X = PJ \circ \Psi_X = P\Psi_X \circ J = \Gamma_X \circ J$. Обратно имеем $\Gamma_X^1 = P_1\,\Psi_X = -JPJ \circ \Psi_X = -JP\Psi_X \circ J = -J \circ \Gamma_X \circ J = \Gamma_X$.

Теорема 4. Предположим, что инвариантное N-оснащение является J-самосопряженным. Для того чтобы G^{Φ}-связность ∇ группы Ли G с функцией Вана Ψ индуцировала на M почти комплексную связность относительно $\bar{J}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$J(\Psi_X Y) - \Psi_X(JY) \in N, \tag{4}$$

для всех $X \in \boldsymbol{g}$, $Y \in \boldsymbol{m}$.

Доказательство. Так как $\Gamma = P\Psi$, то, используя теорему 1, приходим к равенству $J(P\Psi_X Y) = P\Psi_X JY$. В силу J-самосопряженности инвариантного N-оснащения $J \circ P = P \circ J$. Отсюда легко получить (4). Обратное очевидно.

Предположим теперь, что M — регулярное Ф-пространство. Используя [4] и отображение f: $G/G^{\Phi} \to M$, $aG^{\Phi} \to \Phi(a)a^1$, исходя из G^{Φ}-связности ∇ группы G, можно индуцировать на M с помощью отображения $f = \tilde{f} \circ \pi$ связность $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = df \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tag{5}$$

где $\bar{X}$ и $\tilde{X}$, $\bar{Y}$ и $\tilde{Y}$ являются f-связанными векторными полями. Если α, $\tilde{\alpha}$ — функции Номидзу [5] связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно, то из (5) следует, что для всех $X, Y \in \boldsymbol{m}$

$$\tilde{\alpha}(AX, AY) = A\alpha(X, Y). \tag{6}$$

Теорема 5. Для того чтобы индуцированная связность (5) была связностью почти комплексной структуры $\bar{J}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \boldsymbol{m}$

$$J\alpha(X, Y) - \alpha(X, JY) \in \boldsymbol{h}. \tag{7}$$

Доказательство. Учитывая бинвариантность $\tilde{J}$ и формулу $f \circ L_g = I_g \circ f$, легко показать, что $df_g \circ \tilde{J}_g = \bar{J}_{f(g)} \circ df_g$. Тогда $(\bar{J}\tilde{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \tilde{\nabla}_{\bar{X}}\bar{J}\bar{Y}) \Leftrightarrow (\bar{J}df\, \nabla_{\bar{X}}\tilde{Y} = df\, \nabla_{\tilde{X}}\tilde{J}\tilde{Y}) \Leftrightarrow (df\tilde{J}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} = df\, \nabla_{\tilde{X}}\tilde{J}\tilde{Y})$. Учитывая (6) и регулярность Ф-пространства M, имеем (7). Обратное очевидно.

Пусть теперь M — 3-циклическое пространство [6]. В этом случае оператор $J_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta)$, $\theta = \varphi_{|\boldsymbol{m}}$, задает на $\boldsymbol{m}$ комплексную структуру [6].

Теорема 6. Для того чтобы индуцированная связность (5) 3-циклического пространства M была почти комплексной [6], необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \boldsymbol{m}$

$$\varphi\alpha(X, Y) - \alpha(X, \theta Y) \in \boldsymbol{h}. \tag{8}$$

Доказательство. В силу [6], $\tilde{\nabla}$ является почти комплексной тогда и только тогда, когда $J_0\tilde{\alpha}(X, Y) = \tilde{\alpha}(X, J_0 Y)$ для всех $X, Y \in \boldsymbol{m}$. Учитывая (6), регулярность Ф-пространства M и тождество [6] $\theta^2 + \theta + E = 0$ на m, приходим к (8).

Обозначим через M_1 подпространство 3-циклического пространства M, причем степень Φ_1 также равна 3 [7].

Теорема 7. На любом подпространстве M_1 3-циклического пространства M существует почти комплексная структура.

Доказательство. Так как $\theta(m_1) \subset m_1$, где m_1 — касательное пространство к M_1 в единице, то можно положить $J_0^1 = J_{0|m_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta_1^2 - \theta_1)$, $\theta_1 = \theta_{|m_1}$. Тогда тензорное поле $J_x^1 = (dI_g^1)_e J_0^1 (dI_g^1)_x^{-1}$, где $x \in M_1$, $g \in G_1$, $I_g^1(x) = \Phi_1(g)xg^{-1}$, определяет на M_1 почти комплексную структуру, инвариантную относительно G и $D_1 = \Phi_{|M_1}$.

Предположим, что M_1 допускает в M инвариантное N-оснащение [7]. Аналогичным образом определим J_0-сопряженное и J_0-самосопряженное оснащения на M_1 в M.

Очевидно, что J_0-самосопряженность оснащения N в M эквивалентна его самосопряженности, т. е. $\theta N \subset N$.

Так как на M_1 существует инвариантное N-оснащение, то инвариантная связность ∇ пространства M индуцирует на M_1 инвариантную связность $\bar{\nabla}$ [7]. Пусть $\bar{\alpha}$ — функция Номидзу связности $\bar{\nabla}$, а α — функция Номидзу связности ∇.

Аналогично теореме 3 доказывается следующая

Теорема 8. Пусть инвариантное N-оснащение не является самосопряженным, а ∇ — почти комплексная связность относительно канонической почти комплексной структуры 3-циклического однородного пространства M. Для того чтобы она индуцировала на M_1 почти комплексную связность относительно J^1, необходимо и достаточно, чтобы она индуцировала одну и ту же связность вдоль инвариантных N- и J_0N-оснащений.

Учитывая равенство $\bar{\alpha}(X, Y) = P\alpha(X, Y)$, где P — оператор проектирования вдоль N на $\mathfrak{m}_1$, аналогично теореме 6 можно доказать следующую теорему.

Теорема 9. Предположим, что инвариантное N-оснащение является самосопряженным. Для того чтобы ∇ индуцировала на M_1 почти комплексную связность $\bar{\nabla}$ относительно J^1, необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \mathfrak{m}_1$ $\theta\alpha(X, Y) - \alpha(X, \theta_1 Y) \in N$.

Теорема 10. Пусть инвариантное N-оснащение является самосопряженным. Для того чтобы индуцированная аффинная связность удовлетворяла условиям:

а) $\bar{\nabla}$ является инвариантной относительно D_1;

б) $\bar{\nabla}$ является почти комплексной связностью относительно J^1, необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \mathfrak{m}_1$

$$\alpha(X, Y) \in N. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая [8] и теорему 9, запишем условия а) и б) через функцию Номидзу α: $\theta\alpha(X, Y) - \alpha(\theta X, \theta Y) \in N$, $\theta\alpha(X, Y) - \alpha(X, \theta Y) \in N$. Они влекут включение $\alpha(AX, \theta Y) \in N$, которое в силу регулярности M и произвольности X и Y эквивалентно (9). И наоборот, из (9) слудует, что функция Номидзу индуцированной связности $\bar{\alpha}(X, Y) = P\alpha(X, Y) \equiv 0$. Выполнимость условий а) и б) очевидна.

Следствие. На любом подпространстве 3-циклического пространства существует единственная индуцированная связность $\bar{\nabla}$, обладающая свойствами:

а) $\bar{\nabla}$ инвариантна относительно G_1;

б) $\bar{\nabla}$ инвариантна относительно D_1;

в) $\bar{\nabla}$ является связностью почти комплексной структуры относительно J^1.

Замечание. В силу работы [6] на M_1 существует единственная связность ∇_1, удовлетворяющая условиям а) — в) следствия. Это показывает, что ∇_1 совпадает с $\bar{\nabla}$.

Список литературы

1. Ведерников В. И. Обобщенные симметрические пары: Матер. II Прибалт. геом. конференц. Тарту, 1965. С. 36.
2. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1982. № 2. С. 63.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
4. Егиазарян К. М. // Изв. вузов. Матем. 1979. № 1. С. 79.
5. Nomizu K. // Amer. Journ. Math. 1954. V. 76. № 1. P. 33.
6. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1967. № 12. С. 65.
7. Чурбанов Ю. Д. О подпространствах Ф-пространств: Тез. сообщ. IX Всесоюз. геом. конференц. Кишинев, 1988. С. 352.
8. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1967. № 3. С. 88.

Поступила в редакцию 14.10.88.