и выполнено условие:

$$\psi'(k) f_0(\widehat{x}(k), k) \neq 0, \ \forall k \in \overline{0, N-1}, \tag{21}$$

где

$$\psi(k) = \frac{\partial H(\widehat{x}(k), \psi(k+1), u(k), k)}{\partial x}, \tag{22}$$

$$H(\widehat{x}(k), \psi(k+1), u(k), k) = g_0(\widehat{x}(k), k) + \psi'(k+1)(\widehat{f}(\widehat{x}(k), k) + \\ + u'(k) \widehat{D}_0 f_0(\widehat{x}(k), k)), \ k = \overline{0, N-1}, \tag{23}$$

то множество $I(k)$ состоит из таких индексов i_s, для которых $u^0_{i_s}(k) = \lambda_{i_s}(k) = 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем принцип максимума. Поскольку управление $u^0(k)$ удовлетворяет уравнению (20), то оно является оптимальным для процесса (17)—(19). Из этого следует, что вдоль оптимального процесса $(u^0(k), \widehat{x}^0(k))$ и соответствующего решения $\psi^0(k)$ сопряженного уравнения (22) выполняется условие максимума:

$$H(\widehat{x}^0(k), \psi^0(k), u^0(k), k) = \max_{u \in U} H(\widehat{x}^0(k), \psi^0(k), u, k), k = \overline{0, N-1}. \tag{24}$$

В силу линейности по u гамильтониана (23) и условия (21) следует, что оптимальное управление принимает значение 0 или 1.

Из замечания относительно связи задач (12)—(15) и (17)—(19) следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. Минск, 1975.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

Поступила в редакцию 02.12.88.

УДК 517.977

С. ТАГАЙНАЗАРОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных r-вектор функций $u = u(t) = u_p(t)$, $p \in P$, $t \in T$, рассмотрим задачу оптимального управления: *

$$J(u(\cdot) | \theta, \xi(\cdot), v) = c' x(t^*) \to \max_{u(\cdot)}, \tag{1}$$

$$\dot{x} = A(t) x(t) + B(t) u(t) + D(t) \xi(t), \tag{2}$$

$$x(t_*) \in X_* = \{x \in R^n : x = x_0 + G\theta, \ \theta \in \Theta = \{\theta \in R^l : \theta_* \leqslant \theta \leqslant \theta^*\}\}, \tag{3}$$

$$u(t) \in U = \{u \in R^r ; u_* \leqslant u \leqslant u^*\}, \tag{4}$$

$$\xi(t) \in \Xi = \{\xi \in R^k : \xi_* \leqslant \xi \leqslant \xi^*\}, \ t \in T = [t_*, t^*], \tag{5}$$

$$w(t^*) = \mathrm{H} x(t^*) + Lv, \ v \in V = \{v \in R^m : v_* \leqslant v \leqslant v^*\}, \ h_* \leqslant w(t^*) \leqslant h^*. \tag{6}$$

Здесь $A(t) = A(N, N|t)$, $B(t) = B(N, P|t)$, $D(t) = D(N, \Gamma|t)$, $t \in T$,— матричные функции с кусочно-непрерывными элементами; $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $P = \{1, 2, \ldots, r\}$, $\Gamma = \{1, 2, \ldots, k\}$; $G = G(N, \Lambda)$, $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{I}, N)$,

* Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984. Задачи управления Ч. 2.

$L = L(\mathrm{I}, \gamma)$ — матрицы; $\Lambda = \{1, 2, \ldots, l\}$, $\mathrm{I} = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\gamma = \{1, 2, \ldots, q\}$; $x(t)$ — n-вектор фазовых переменных системы (2) в момент времени t; $u(t)$, $t \in T$,— r-мерное управляющее воздействие; $\xi(t)$, $t \in T$,— кусочно-непрерывная k-вектор-функция неконтролируемых возмущений на входе динамической системы; x_0 — детерминированная составляющая вектора начальных значений фазовых переменных; θ — l-вектор возмущений начальных значений фазовых переменных; v — m-вектор возмущений выходных сигналов; $w(t^*)$ — m-вектор терминальных значений выходных сигналов; c — n-вектор параметров критерия качества, $\theta^* \geqslant 0$, $\theta_* \leqslant 0$ — l-векторы ограничений на возмущения начальных значений фазовых переменных; u_*, u^* — r-векторы ограничений на управляющие воздействия; $\xi^* \geqslant 0$, $\xi_* \leqslant 0$ — k-векторы ограничений на неконтролируемые возмущения на входе динамической системы; $v^* \geqslant 0$, $v_* \leqslant 0$ — m-векторы ограничений на возмущения выходных сигналов; h_*, h^* — m-векторы ограничений на выходные сигналы.

Определение 1. Пусть задана совокупность $\mu = (\chi, d_*, d^*)$, где χ — число, d_*, d^* — m-векторы. Кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющее неравенствам (4), назовем μ-допустимым (или, кратко, μ-управлением), если

$$W(t^*) \subset W_\mu = \{w \in R^m\colon h_* + \chi d_* \leqslant w \leqslant h^* + \chi d^*\}.$$

При исследовании задачи оптимального управления динамической системой в условиях неопределенности в рамках принципа получения гарантированного результата естественно качество допустимого управления оценивать по величине гарантированного значения критерия качества: $J^-(u(\cdot)) = \min\limits_{\theta\in\Theta,\ v\in V,\ \xi(t)\in\Xi,\ t\in T} J(u(\cdot) \mid \theta, \xi(\cdot), v)$.

Определение 2. μ-управление $u^0 = u^0(t)$, $t \in T$, называется оптимальным, если $J^-(u^0(\cdot)) = \max\limits_{u(\cdot)} J^-(u(\cdot))$.

Пусть $F(t, \tau)$, t, $\tau \in T$,— фундаментальная матрица решений однородной части $\dot{x} = Ax$ динамической системы (2):

$$F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau), \quad \dot{F} = AF, \quad F(t_*) = \mathrm{E}.$$

Обозначим: $\bar{c}'(t) = c'F(t^*, t)B(t)$, $\bar{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{H}F(t^*, t)B(t)$, $\bar{D}(t) = \mathrm{H}F(t^*, t)D(t)$, $\bar{G} = \mathrm{H}F(t^*, t_*)G$, $\bar{x}_0 = \mathrm{H}F(t^*, t_*)x_0$.

Из множества I выделим подмножество $\mathrm{I}_{\text{оп}}$. На отрезке выберем конечное множество моментов $T_{\text{оп}} = \{t_j, j \in J_{\text{оп}}\}$, $t_j < t_{j+1}$, $|J_{\text{оп}}| \leqslant |I_{\text{оп}}|$. Каждому моменту t_j поставим в соответствие такой набор индексов: $P_{\text{оп}}(t_j) = P^j_{\text{оп}} \subset P$, что $|\mathrm{I}_{\text{оп}}| = |P_{\text{оп}}|$. Обозначим: $P_{\text{оп}} = \{P^j_{\text{оп}}, j \in J_{\text{оп}}\}$, $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, P_{\text{оп}}\}$. Совокупность $\mathrm{M}_{\text{оп}} = \{\mathrm{I}_{\text{оп}}, K_{\text{оп}}\}$ назовем опорой задачи (1)—(6), если невырождена опорная матрица $\Phi(\mathrm{M}_{\text{оп}}) = \Phi(\mathrm{I}_{\text{оп}}, K_{\text{оп}})$.

Определение 3. Пару $\{u(\cdot), \mathrm{M}_{\text{оп}}\}$ из μ-допустимого управления $u(\cdot)$ и опоры $\mathrm{M}_{\text{оп}}$ назовем опорным μ-управлением. Будем считать его невырожденным, если $u_{*p} < u_p(t) < u^*_p$, $p \in P_{\text{оп}}(t)$, $t \in T_{\text{оп}}$, и при всех $\theta \in \Theta$, $\xi(t) \in \Xi$, $t \in T$; $v \in V$ выполняются неравенства:

$$h_{*\text{н}} + \chi d_{*\text{н}} < \int\limits_T \bar{\mathrm{H}}(\mathrm{I}_\text{н}, P \mid t)\, u(t)\, dt + \int\limits_T \bar{D}(\mathrm{I}_\text{н}, \Gamma \mid t)\, \xi(t)\, dt +$$
$$+ (\bar{x}_0)_\text{н} + G(I_\text{н}, N)\,\theta + L(\mathrm{I}_\text{н}, \gamma)\, v < h^*_\text{н} + \chi d^*_\text{н},$$

где $\mathrm{I}_\text{н} = \mathrm{I} \setminus \mathrm{I}_{\text{оп}}$, $h_{*\text{н}} = h_*(\mathrm{I}_\text{н})$, $h^*_\text{н} = h^*(I_\text{н})$, $(\bar{x}_0)_\text{н} = \bar{x}_0(\mathrm{I}_\text{н})$.

Опорному управлению $\{u(\cdot), \mathrm{M}_{\text{оп}}\}$ поставим в соответствие вектор $\mathrm{Z} = \int\limits_T \bar{\mathrm{H}}(\mathrm{I}, P \mid t)\, u(t)\, dt + \bar{x}_0$, траекторию $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = c - \mathrm{H}'\nu, \tag{7}$$

где ν — вектор потенциалов:

$$\nu = (c(t_j),\ j \in J_{\text{оп}})'\Phi^{-1}. \tag{8}$$

Положим

$$\Delta(t) = -B'(t)\psi(t), \quad t \in T. \tag{9}$$

Далее подсчитаем:

$$\alpha_i^- = h_{*i} + \chi d_{*i} - \varphi_i^-, \quad \alpha_i^+ = h_i^* + \chi d_i^* - \varphi_i^+,$$

где

$$\varphi_i^- = \min_{\xi(t)\in\Xi,\ t\in T} \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t)\,\xi(t)\,dt + \min_{\theta\in\Theta} \bar{G}(i, \Lambda)\,\theta +$$

$$+ \min_{v\in V} L(i, \gamma)\,v = \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t)\,\xi_{(i)}^-(t)\,dt + \bar{G}(i, \Lambda)\,\theta_{(i)}^- + L(i, \gamma)\,v_{(i)}^-,$$

$$\varphi_i^+ = \max_{\xi(t)\in\Xi,\ t\in T} \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t)\,\xi(t)\,dt + \max_{\theta\in\Theta} \bar{G}(i, \Lambda)\,\theta +$$

$$+ \max_{v\in V} L(i, \gamma)\,v = \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t)\,\xi_{(i)}^+(t)\,dt + G(i, \Lambda)\,\theta_{(i)}^+ + L(i, \gamma)\,v_{(i)}^+.$$

2. Перейдем к исследованию субоптимальных управлений.

Определение 4. μ-управление $u^\varepsilon(t)$, $t \in T$, назовем (строго) ε-оптимальным, если

$$J^-(u^0) - J^-(u^\varepsilon) < \varepsilon.$$

Для опорного управления $\{u(\cdot), \mathrm{M}_{\text{оп}}\}$ подсчитаем вектор потенциалов $\nu_{\text{оп}}$, (8); коуправление $\Delta(t)$, $t \in T$, (9). Введем понятия μ-псевдоуправления $\omega(t)$, $t \in T$, и вектор ζ, сопровождающих опору $\mathrm{M}_{\text{оп}}$.

Разобьем множества $\mathrm{I}_{\text{оп}}$, T на непересекающиеся подмножества:

$$\mathrm{I}_{\text{оп}}^+ = \{i \in \mathrm{I}_{\text{оп}} : \nu_i \geqslant 0\}, \quad \mathrm{I}_{\text{оп}}^- = \{i \in \mathrm{I}_{\text{оп}} : \nu_i \leqslant 0\},$$

$$\mathrm{I}_{\text{оп}}^+ \cap I_{\text{оп}}^- = \varnothing, \quad I_{\text{оп}}^+ \cup I_{\text{оп}}^- = I_{\text{оп}};$$

$$T_{(p)}^+ = \{t \in T : \Delta_p(t) \geqslant 0\}, \quad T_{(p)}^- = \{t \in T : \Delta_p(t) \leqslant 0\},$$

$$T_{(p)}^+ \cap T_{(p)}^- = \varnothing, \quad T_{(p)}^+ \cup T_{(p)}^- = T, \quad p \in P.$$

Сначала построим $\varsigma_{\text{оп}} : \varsigma_i = \alpha_i^+$, если $i \in \mathrm{I}_{\text{оп}}^+$; $\varsigma_i = \alpha_i^-$, если $i \in \mathrm{I}_{\text{оп}}^-$. Функцию $\omega(t)$, $t \in T$ построим в виде $\omega(t) = \omega^\pi(t) + \omega^\delta(t)$, $t \in T$. Положим $\omega_p^\pi(t) = u_{*p}$, если $t \in T_{(p)}^+$; $\omega_p^\pi(t) = u_p^*$, если $t \in T_{(p)}^-$; $\omega_p^\delta(t) = \sum_{j\in J_{(p)}} \omega_p^j\,\delta(t - t_j)$, $t \in T$, $p \in P$, где совокупность $\omega_{\text{оп}} = (\omega_p^j,\ j \in J_{(p)},\ p \in P)$ равна $\omega_{\text{оп}} = Q\left(\varsigma_{\text{оп}} - \int_T \bar{H}(\mathrm{I}_{\text{оп}}, P|t)\,\omega^\pi(t)\,dt - (\bar{x}_0)_{\text{оп}}\right)$. В заключение положим $\varsigma_{\text{н}} = \int_T \bar{H}(\mathrm{I}_{\text{н}}, P|t)\,\omega(t)\,dt + (\bar{x}_0)_{\text{н}}$.

Число

$$\beta = \beta(u(\cdot), \mathrm{M}_{\text{оп}}) = \int_T \Delta'(t)\,(u(t) - \omega^\pi(t))\,dt + \nu_{\text{оп}}'(\varsigma_{\text{оп}} - \mathrm{Z}_{\text{оп}})$$

назовем оценкой субоптимальности опорного μ-управления $\{u(\cdot), \mathrm{M}_{\text{оп}}\}$. Решения $x^*(t)$, $t \in T$ системы $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $x(t_*) = x_0$ назовем идеальной траекторией соответствующих управлений $u(t)$, $t \in T$. Построим экстремальные траектории $x_{(i)}^+(t)$, $x_{(i)}^-(t)$, $t \in T$, $i \in \mathrm{I}_{\text{оп}}$ динамической системы (2), порождаемые соответственно совокупностями:

$$x_{(i)}^+(t_*) = x_0 + G\theta_{(i)}^+, \quad u(t), \quad \xi_{(i)}^+(t), \quad t \in T, \quad i \in \mathrm{I}_{\text{оп}}$$

и

$$x_{(i)}^-(t) = x_0 + G\theta_{(i)}^-, \quad u(t), \quad \xi_{(i)}^-(t), \quad t \in T, \quad i \in \mathrm{I}_{\text{оп}}.$$

Им соответствуют экстремальные значения выходных сигналов:

$$w_{(i)}^+(t^*) = \mathrm{H}(i, N)\,x_{(i)}^+(t^*) + L(i, \Lambda)\,v_{(i)}^+,$$

$$w_{(i)}^-(t^*) = \mathrm{H}(i, N)\,x_{(i)}^-(i^*) + L(i, \Lambda)\,v_{(i)}^-, \quad i \in \mathrm{I}_{\text{оп}}.$$

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon > 0$ для ε-оптимальности в задаче (1)—(6) μ-управления $u(t)$, $t \in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры $M_{оп}$, при которой оценка субоптимальности опорного μ-управления $\{u(\cdot), M_{оп}\}$ удовлетворяла неравенству $\beta(u(\cdot), M_{оп}) \leqslant \varepsilon$.

Принцип ε-максимума. При любом $\varepsilon > 0$ μ-управление $u(t)$, $t \in T$, является ε-оптимальным управлением задачи (1)—(6) тогда и только тогда, когда существует такая опора $M_{оп}$, что вдоль опорного μ-управления $\{u(\cdot), M_{оп}\}$ и соответствующих ему идеальной траектории $x^*(t)$, $t \in T$ и решений $\psi(t)$, $t \in T$ сопряженной системы (7) выполняется принцип ε-максимума:

1) (условие $\varepsilon(\cdot)$— максимума):

$$\psi'(t) B(t) u(t) = \max_{u_* \leqslant u \leqslant u^*} \psi'(t) B(t) u - \varepsilon(t), \quad t \in T,$$

2) (условие трансверсальности)

$$\nu_i h'_{(i)} x^*(t^*) = \max_{\alpha_i^- \leqslant w_i \leqslant \alpha_i^+} \nu_i w_i - \varepsilon_i, \quad i \in I_{оп},$$

3) $\beta = \int\limits_T \varepsilon(t)\, dt + \sum\limits_{i \in I_{оп}} \varepsilon_i \leqslant \varepsilon.$

Поступила в редакцию 03.02.89.

УДК 514.76

Ю. Д. ЧУРБАНОВ

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА Ф-ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Пусть G — связная группа Ли с единицей e, Φ — ее аналитический автоморфизм, G^Φ — группа неподвижных точек автоморфизма Φ. Обозначим через M реализацию В. И. Ведерникова [1] однородного Ф-пространства G/G^Φ, через I — действие G на M [1].

$$I_g(x) = \Phi(g) x g^{-1}, \tag{1}$$

$x \in M$, $g \in G$. Пусть $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — алгебры Ли групп G и G^Φ соответственно, $\varphi = (d\Phi)_e$, $A = \varphi - id$, $\boldsymbol{m} = A\boldsymbol{g}$ — касательное пространство к M в единице e [2].

Предположим, что на M существует почти комплексная структура J_1. Она называется G-инвариантной, если для всех $g \in G$

$$dI_g \circ J_1 = J_1 \circ dI_g. \tag{2}$$

Обозначим через J сужение J_1 на $\boldsymbol{m}$.

Теорема 1. Предположим, что на M существует почти комплексная G-инвариантная структура J_1. Пусть ∇ — инвариантная аффинная связность пространства M, Γ — ее функция Вана [2]. Для того чтобы ∇ была почти комплексной связностью относительно J_1 (т. е. $\nabla J_1 = 0$), необходимо и достаточно, чтобы для всех $X \in \boldsymbol{g}$

$$J \circ \Gamma_X = \Gamma_X \circ J. \tag{3}$$

Доказательство. Если ∇ — почти комплексная связность, то из равенств $(\nabla_{X^*} J_1 \tilde{Y})_e = [X^*, J_1 \tilde{Y}]_e - \Gamma_X J \tilde{Y}_e$, $J(\nabla_{X^*} \tilde{Y})_e = J\,]X^*, \tilde{Y}]_e - J\Gamma_X \tilde{Y}_e = [X^*, J_1 \tilde{Y}]_e - J\,\Gamma_X \tilde{Y}_e$ имеем $J \cdot \Gamma_X = \Gamma_X \cdot J$. Обратно, рассмотрим связность $\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} = -J_1 \nabla_{\tilde{X}} J_1 \tilde{Y}$ с функцией Вана $\tilde{\Gamma}$. Тогда получаем:

$$\tilde{\Gamma}_X \tilde{Y}_e = -(\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{Y})_e + [X^*, \tilde{Y}]_e = J(\nabla_{X^*}, J_1 \tilde{Y})_e + [X^*, \tilde{Y}]_e =$$