$$\dot{x}(t) = Ax(t-h) + Bu(t). \qquad (7)$$

В свою очередь, из полученной выше теоремы следует, что полная управляемость системы (7) эквивалентна управляемости системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

параметрический критерий управляемости которой хорошо известен [5]:

$$\operatorname{rank}[B;\ AB;\ \ldots;\ A^{n-1}B] = n. \qquad (8)$$

Значит, условие (8) является параметрическим критерием управляемости как системы (7), так и системы (6).

Список литературы

1. Булатов В. И. // Управление многосвязными системами: V Всесоюз. совещ. Тбилиси, 1984 / М.: Ин-т проблем управления, 1984. С. 78.
2. Булатов В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 1. С. 63.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
4. Маркушевич А. И. Целые функции. М., 1975.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1977.

Поступила в редакцию 26.12.88.

УДК 517.988.8;517.983

Т. А. МАКАРЕВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ *К*-РАДИУС ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работах [1, 2] предложено новое обобщение принципа Банаха — Каччиополли сжимающих отображений на операторы в K-метрических пространствах, удовлетворяющих условию Липшица:

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant Q\rho(x_1, x_2), \qquad (1)$$

с коэффициентом Q — линейным или нелинейным оператором, действующим в пространстве B значений K-метрики. Это обобщение основано на использовании нового понятия — спектрального K-радиуса $r(Q)$ оператора Q, также являющегося оператором в пространстве B и обладающего свойствами, аналогичными свойствам обычного числового спектрального радиуса. В частности, достаточным условием существования неподвижной точки удовлетворяющего условию Липшица (1) оператора A в секвенциально полном K-метрическом пространстве X будет неравенство $r(Q)u_0 < 1$ при подходящем $u_0 \in B$, и, таким образом, применение новой теоремы о неподвижной точке требует умения вычислять или достаточно хорошо оценивать спектральный K-радиус конкретных операторов Q. Естественно, наиболее важен здесь случай, когда оператор Q линейный.

Соответствующие вычисления в [1, 2] с достаточной полнотой проведены лишь для случая, когда пространство B конечномерное. Настоящая работа посвящена более трудному случаю, когда B — некоторое пространство последовательностей. Наиболее естественное из таких пространств — пространство s всех последовательностей — ненормируемое и поэтому часто непригодно во многих приложениях. Это приводит к необходимости изучения спектрального K-радиуса в пространствах последовательностей, являющихся подпространствами s, которые с подходящей нормой, порождающей более сильную, чем в s, сходимость, оказываются банаховыми.

Наибольший интерес представляют пространства l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и $c_0 = l^0_\infty$. Именно они и рассматриваются в данной работе.

1. Ниже X — одно из пространств l_p или c_0, а Q — линейный оператор, заданный при помощи бесконечной матрицы с неотрицательными элементами q_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. Пусть Q является ограниченным оператором в X. Тогда при любом $u_0 \in X$

$$r(Q)\,u_0 \leqslant \rho_X(Q), \tag{2}$$

где $\rho_X(Q)$ — спектральный радиус Q в X.

Предположение, что Q действует в одном из пространств l_p или c_0, естественно сформулировать в терминах коэффициентов матрицы Q. Для случаев l_1, l_∞ и c_0 здесь известны необходимые и достаточные условия (см. [3—5]); для $l_p\,(1<p<\infty)$ существуют лишь достаточные признаки. Нами приводится новое утверждение, аналогичное соответствующему утверждению для интегральных операторов из [6]. Для его формулировки введем величины:

$$u_{r,k}(Q) = \|u_i\|_k \quad (u_i = \|q_{ij}\|_r),$$
$$v_{r,k}(Q) = \|v_j\|_k \quad (v_j = \|q_{ij}\|_r)$$

$(0 \leqslant r,\ k \leqslant \infty)$; здесь $\|\xi\|_p\,(0<p\leqslant\infty)$ — «норма»:

$$\|\xi\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} & \text{при } 0<p<\infty, \\ \sup\limits_i |\xi_i| & \text{при } p=\infty. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $u_{r_1,k_1}(Q)$, $u_{r_2,k_2}(Q)<\infty$; пусть числа p, λ, r_1, k_1, r_2, k_2 удовлетворяют неравенствам, $0<\lambda<1$, $0\leqslant \frac{1-\lambda}{r_1}+\frac{\lambda}{r_2}$, $\frac{1-\lambda}{r_1}+\frac{\lambda}{m_2}$, $\frac{1-\lambda}{m_1}+\frac{\lambda}{r_2}\leqslant 1$ и неравенствам $\frac{1-\lambda}{m_1}+\frac{\lambda}{r_2}\leqslant\frac{1}{p}\leqslant 1-\frac{1-\lambda}{r_1}-\frac{\lambda}{m_2}$. Тогда Q ограничен в l_p, причем $\|Q\|\leqslant u_{r_1,k_1}(Q)^{1-\lambda}\,u_{r_2,k_2}(Q)^{\lambda}$. Более того, можно утверждать, что Q компактен, если или $m_1<\infty$, или $m_2<\infty$, или $m_1=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_{r_1,m_1}(Q_{(n)})=0$ или $m_2=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} v_{r_2,m_2}(Q^{(n)})=0$; здесь $Q_{(n)}$ — матрица с элементами $q_{i,\,j+n}$, а $Q^{(n)}$ — с элементами $q_{i+n,\,j}$.

2. Применение описанных результатов к анализу спектрального K-радиуса $r(Q)$ в пространствах $l_p\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и c_0 позволяет получить для него лишь крайне грубые оценки сверху, основанные на использовании неравенств (2) и $\rho_p(Q)\leqslant\|Q\|$. Поэтому естественно возникает вопрос о том, насколько может быть уточнен результат теоремы 1. В конечномерном случае в (2) почти для всех u_0 имеет место знак равенства. Подобная ситуация, к сожалению, есть и в бесконечномерном случае. Верна следующая

Теорема 3. Пусть Q — компактный оператор в l_p и элементы матрицы Q удовлетворяют неравенствам $q_{ij}\geqslant u_i v_j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots)$, где $(u_i)\in l_p$, $(v_j)\in l$ с положительными координатами. Тогда для каждого ненулевого $u_0\in l_p$ справедливо равенство $r(Q)\,u_0=\rho_p(Q)$, при этом $\rho_p(Q)>0$.

3. Для приложений наибольший интерес представляют ситуации, когда неравенство (2) является строгим. Здесь удается получить лишь частные результаты.

Рассмотрим матрицу вида

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & T_1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & T_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

где $T_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots)$ и 0 — матрицы-блоки размера $k\times k$.

Теорема 4. Пусть $u_0=(\dot u_1,\ \ldots,\ \dot u_n,\ \ldots)\in s$. Тогда справедливо неравенство $r(Q)\,u_0\leqslant\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dot u_k}\cdot H(Q)$, где $H(Q)$ — блок-вектор, определенный равенством $H(Q)=(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{T_1\ldots T_k\,\mathbf{1}},\ \ldots,\ \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{T_{n+1}\ldots T_{n+k-1}\,\mathbf{1}},\ \ldots)$, $\mathbf{1}$ — единичный k-мерный вектор.

В заключение автор выражает благодарность профессору П. П. Забрейко и доценту А. Б. Антоневичу за обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Забрейко П. П., Макаревич Т. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 53.
2. Забрейко П. П., Макаревич Т. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1497.
3. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
4. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
6. Забрейко П. П. К теории интегральных операторов II. Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1982. С. 80.
7. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
8. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М., 1985.

Поступила в редакцию 01.03.89.