## Список литературы


1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Woodall D. R. // J. Combin. Theory. Ser. B. 1973. V. 15. P. 225.
3. Borowiecki M. // Graphs, hypergraphs and matroids. Zielona Gora, 1985. P. 85.
4. Michalak D. Ibid. P. 45.
5. Moon J. // Canad. Math. Bull. 1972. V. 15. P. 39.


Поступила в редакцию 14.11.87.

*УДК 517.948.32:517.544*

*С. Л. ШТИН*

# ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В. Е. КРУГЛОВА

Пусть $L$ — сложный кусочно-гладкий контур, расположенный в конечной части плоскости, а $\Lambda$ — конечное множество точек из $L$, содержащее все нерегулярные точки. Пусть, далее, $L_1, L_2, \ldots, L_N$ — компоненты связности множества $L \setminus \Lambda$, и на каждом $L_j$ задана невырожденная функциональная матрица $G_j(t)$ порядка $n$, удовлетворяющая условию Гельдера. Таким образом, на $L \setminus \Lambda$ задается матричная функция $G(t)$. Зададим еще на $L \setminus \Lambda$ $H$-непрерывный $n$-мерный вектор $g(t)$.

Рассмотрим матричную краевую задачу Римана: найти все векторы-столбцы $\Phi(z)$, голоморфные вне $L$, исчезающие на бесконечности, $H$-непрерывно продолжимые слева и справа на $L \setminus \Lambda$, где должно выполняться краевое условие

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in L \setminus \Lambda.$$

Ограничимся тем случаем, когда $G(t)$ — подстановочная матрица, т. е. для каждого $j$ матрица $G_j(t)$ является образом некоторой подстановки из $S_n$ при мономиальном представлении. Частные случаи этой задачи изучались в работах Э. И. Зверовича, Л. И. Померанцевой [1] и В. Е. Круглова [2].

При решении матричной задачи Римана важное значение имеет изучение возможности редукции с помощью невырожденной линейной замены переменных данной $n$-мерной задачи к двум задачам меньшей размерности.

В работе [2] такая замена переменных указывается для $G(t) = S_3$ и $S_4$ и доказывается ее невозможность в случае $G(t) = S_5$. В связи с этими результатами В. Е. Круглов высказал в 1985 г. гипотезу о том, что линейная замена, редуцирующая $n$-мерную задачу Римана к задачам меньших размерностей, существует только для разрешимых групп подстановок.

В настоящей работе эта гипотеза опровергается. Приводится пример неразрешимой группы, для которой существует редуцирующая замена переменных. Перейдем к изложению этого примера. Мы укажем такую группу $G \subset S_8$ и такую матрицу $S \in GL\,(8, \mathbf{C})$, что для всех $g \in G$ будет иметь место равенство

$$(*)\quad S^{-1} g S = 1 \oplus P_g,$$

где $P_g$ — некоторая мономиальная матрица порядка 7 (такая матрица может отличаться от подстановочной тем, что ее ненулевые элементы — произвольные числа из $\mathbf{C}^*$).

Рассмотрим подгруппу $G \subset S_8$, порожденную тремя элементами: $\sigma = (1234567)$, $\rho = (18)(24)(37)(56)$, $\tau = (23)(47)$. Очевидно, что $G = \langle\sigma, \rho, \tau\rangle \not\subset S_k$ при $k < 8$. Если не накладывать этого ограничения, то можно получить тривиальные контрпримеры ($S_n \supset S_{n-1} = G$ — неразрешимая подгруппа при $n \geqslant 6$ и $S = I_n$), которые не являются, однако, содержательными при рассмотрении краевой задачи Римана.

Рассмотрим в $G$ подгруппу $\langle\sigma, \tau\rangle$. Можно доказать [3], что $\langle\sigma, \tau\rangle \cong PSL\,(3, 2)$, а последняя группа, как известно, проста. Следовательно, наша группа $G$ разрешимой не будет, так как в противном случае любая ее подгруппа должна была бы быть разрешимой. Теперь построим такую матрицу $S \in GL\,(8,\, \mathbf{C})$, что для всех $g \in G$ выполняется равенство (*). Достаточно установить, что это равенство имеет место для образующих $\sigma$, $\rho$, $\tau$.

Если считать матрицы, представляющие элементы $g \in G$, матрицами линейных преобразований, записанными в каноническом базисе, то преобразование $g \mapsto S^{-1}gS$ можно интерпретировать как замену базиса. Выполнение равенства (*) означает тогда существование такого базиса $W_1, W_2, \ldots, W_8$, для которого прямые $<W_i>$, $i = 1, \ldots, 8$ будут претерпевать под действием $\sigma$, $\rho$, $\tau$ некоторые перестановки, причем $W_1^\sigma = W_1^\rho = W_1^\tau = W_1$.

Рассмотрим следующую матрицу

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $S \in GL\,(8,\, \mathbf{C})$ и что $\sigma$, $\rho$, $\tau$ действуют на $W_i$ следующим образом:

$$W_1^\sigma = W_1,\ W_2^\sigma = W_3,\ W_3^\sigma = W_4,\ W_4^\sigma = W_5,\ W_5^\sigma = W_6,\ W_6^\sigma = W_7,\ W_7^\sigma = W_8,\ W_8^\sigma = W_2;$$

$$W_1^\rho = W_1,\ W_2^\rho = -W_2,\ W_3^\rho = -W_3,\ W_4^\rho = -W_4,\ W_5^\rho = W_5,\ W_6^\rho = -W_6,\ W_7^\rho = W_7,\ W_8^\rho = W_8;$$

$$W_1^\tau = W_1,\ W_2^\tau = W_2,\ W_3^\tau = W_6,\ W_4^\tau = W_4,\ W_5^\tau = W_5,\ W_6^\tau = W_3,\ W_7^\tau = W_8,\ W_8^\tau = W_7.$$

Отсюда следует, что множество матриц $S^{-1}GS$ действительно имеет вид $1 \oplus P_g$, где $P_g$ — мономиальная матрица порядка 7.

В заключение отметим, что утверждение гипотезы относительно существования трансформирующего преобразования $S$ в (*) для разрешимых подгрупп, возможно, верно. Здесь мы докажем ее для разрешимых подгрупп в $S_p$ в том случае, когда $p$ — простое число. В этом случае структура максимальных разрешимых подгрупп наиболее проста. Известно [4], что с точностью до сопряженности в $S_p$ имеется одна максимальная разрешимая транзитивная подгруппа $\Gamma_p$. Эта группа имеет порядок $p(p-1)$ и состоит из всех подстановок вида: $h_{\alpha\beta}(x) = \beta x + \alpha$; $\alpha, \beta, x \in \mathbf{F}_p$, $\beta \neq 0$ (если множество, на котором действует $S_p$, интерпретировать как конечное поле).

Покажем, что $\Gamma_p$ порождается двумя образующими.

Известно, что мультипликативная группа $\mathbf{F}_p^*$ циклическая, т. е. $\mathbf{F}_p^* = \langle \zeta \rangle$ для некоторого $\zeta \in \mathbf{F}_p^*$.

Рассмотрим подстановки: $\sigma(x) = x + 1$ и $\tau(x) = \zeta x$, $\mathrm{ord}(\sigma) = p$ и $\mathrm{ord}(\tau) = p - 1$. Любая подстановка $h_{\alpha\beta} \in \Gamma_p$ представляется тогда следующим образом: $h_{\alpha\beta}(x) = \beta x + \alpha = \sigma^\alpha \tau^s(x)$, где $s$ — такое целое число, что $\zeta^s \equiv \beta\,(\mathrm{mod}\, p)$ (такое $s$ всегда существует, так как $\beta \neq 0$ и $\zeta$ — образующий элемент).

Для того чтобы доказать равенство (*) для группы $\Gamma_p$, мы, как и выше, построим такой базис $W_0, W_1, \ldots, W_{p-1}$ в $\mathbf{C}^n$, чтобы прямые $<W_i>$

испытывали при действии элементов $\sigma$, $\tau \in \Gamma_p$ некоторые перестановки, причем вектор $W_0$ оставался бы неподвижным. (Он отвечает единице в прямом разложении $1 \oplus P_g$). Искомая матрица $S$ будет тогда состоять из столбцов координат векторов $W_i$.

Заметим прежде всего, что, с точностью до растяжения, $W_0 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{p-1}$, где $v_i$ — $(i+1)$-й вектор стандартного базиса в $\mathbf{C}^n$. Действительно, пусть $W_0 = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1}$. Тогда из условия $W_0^\sigma = W_0$ получаем:

$$(\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1})^\sigma = \alpha_0 v_{\sigma(0)} + \alpha_1 v_{\sigma(1)} + \ldots + \alpha_{p-1} v_{\sigma(p-1)} =$$
$$= \alpha_0 v_1 + \alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_{p-2} v_{p-1} + \alpha_{p-1} v_0 = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Сравнивая коэффициенты, находим: $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1}$. Если $W_0$, $W_1, \ldots, W_{p-1}$ — искомый базис, то, как уже было отмечено, каждый элемент $g \in \Gamma_p$ должен индуцировать некоторую подстановку $\pi_g$ на множестве прямых $<W_0>, \ldots, <W_{p-1}>$, причем $<W_0>$ — неподвижная точка этой подстановки.

Посмотрим, какая подстановка $\pi_\sigma$ отвечает образующей $\sigma$ группы $\Gamma_p$. Ясно, что отображение $g \mapsto \pi_g$ — гомоморфизм групп. Из того, что $\sigma$ — цикл порядка $p$, мы получаем, что $\operatorname{ord}(\pi_\sigma) \mid p$. В силу простоты $p$ для $\operatorname{ord}(\pi_\sigma)$ есть только две возможности: $\operatorname{ord}(\pi_\sigma) = p$ и $\operatorname{ord}(\pi_\sigma) = 1$. Но первая из них означает, что $\pi_\sigma$ — цикл порядка $p$, что противоречит условию $\pi_\sigma <w_0> = <w_0>$. Следовательно, $\operatorname{ord}(\pi_\sigma) = 1$, т. е. $\pi_\sigma$ — единичная подстановка.

Положим $W_1 = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1}$. Из условия $<W_1>^\sigma = <W_1>$ получаем:

$$(\alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1})^\sigma = \alpha_0 v_1 + \alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_{p-2} v_{p-1} + \alpha_{p-1} v_0 =$$
$$= \lambda(\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1}).$$

Сравнивая коэффициенты, находим:

$$\alpha_{p-1} = \lambda \alpha_0, \ \alpha_{p-2} = \lambda \alpha_{p-1}, \ldots$$

Таким образом, с точностью до растяжения,

$$W_1 = v_0 + \lambda^{p-1} v_1 + \lambda^{p-2} v_2 + \ldots + \lambda v_{p-1}.$$

Равенство $\sigma^p = 1$ влечет $\lambda^p = 1$.

Если в качестве $\lambda$ выбирать различные корни из единицы степени $p$, то получим $p-1$ различных векторов. Их мы и примем в качестве $W_1$, $W_2, \ldots, W_{p-1}$. Убедимся, что векторы $W_0, W_1, \ldots, W_{p-1}$ образуют базис. Для этого рассмотрим определитель:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \lambda^{p-1} & (\lambda^2)^{p-1} & \ldots & (\lambda^{p-1})^{p-1} \\ 1 & \lambda^{p-2} & (\lambda^2)^{p-2} & \ldots & (\lambda^{p-1})^{p-2} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & \lambda^2 & (\lambda^2)^2 & \ldots & (\lambda^{p-1})^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{p-1} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \lambda^{p-1} & (\lambda^{p-1})^2 & \ldots & (\lambda^{p-1})^{p-1} \\ 1 & \lambda^{p-1} & (\lambda^{p-1})^2 & \ldots & (\lambda^{p-2})^{p-1} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & \lambda^2 & (\lambda^2)^2 & \ldots & (\lambda^2)^{p-1} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Последний определитель — это определитель Вандермонда и поэтому отличен от нуля.

Осталось убедиться в том, что для каждой прямой $<W_i>$ существует такая прямая $<W_j>$, что $<W_i>^\tau = <W_j>$.

Мы покажем, что имеет место даже более точное соотношение: $W_i^\tau = W_j$. Поскольку все векторы $W_i$ отличаются друг от друга лишь тем, что при их построении используются различные корни из единицы степени $p$, то достаточно установить, что найдется такой вектор $W_i$, для которого имеет место равенство $W_1^\tau = W_i$:

$$W_1^\tau = (v_0 + \lambda^{p-1} v_1 + \lambda^{p-2} v_2 + \ldots + \lambda v_{p-1})^\tau = v_0 + \lambda^{p-1} v_{\overline{\zeta}} + \lambda^{p-2} v_{\overline{2\zeta}} +$$
$$+ \ldots + \lambda v_{\overline{(p-1)\zeta}}.$$

Здесь черта означает приведение по $\operatorname{mod} p$.

Любой вектор $W_i$ имеет вид: $v_0+(\lambda^s)^{p-1}v_1+(\lambda^s)^{p-2}v_2+\ldots+\lambda^s v_{p-1}$. Сопоставим векторам $W_1^{\tau}$ и $W_i$ подстановки $\pi$ и $\Theta$ соответственно:

$$\pi=\begin{pmatrix}\overline{\zeta} & \overline{2\zeta} & \ldots & \overline{(p-1)\zeta}\\ p-1 & p-2 & \ldots & 1\end{pmatrix};\quad \Theta=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p-1\\ \overline{s(p-1)} & \overline{s(p-2)} & \ldots & \overline{s1}\end{pmatrix}.$$

Тогда доказательство существования вектора $W_i$ сведется к доказательству существования такого целого числа $s$, для которого имеет место равенство $\pi=\Theta$ или, что равносильно, $\pi^{-1}\Theta=1$. Берем произвольное $k$, $1\leqslant k\leqslant p-1$, и действуем на него $\pi^{-1}\Theta$:

$$k\overset{\pi^{-1}}{\longmapsto}\overline{(p-k)\zeta}\overset{\Theta}{\longmapsto}\overline{s(p-\overline{(p-k)\zeta})}=\overline{s(p-\overline{-k\zeta})}=$$
$$=\overline{s(-\overline{-ks})}=\overline{s(-(p-1)k\zeta)}=\overline{sk\zeta}.$$

Если мы возьмем $s=\zeta^{p-2}$, то получим

$$\overline{sk\zeta}=\overline{\zeta^{p-1}k}=\overline{k}=k.$$

Таким образом, $\pi^{-1}\Theta=1$, что и требовалось доказать.

## Список литературы


1. Зверович Э. И., Померанцева Л. И. Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 20.
2. Круглов В. Е. Частные индексы и одно приложение факторизации матриц подстановочного типа не выше четвертого порядка. Новосибирск, 1982.
3. Чарльз К. Симс. Вычислительные методы в изучении групп перестановок // Сб. переводов: Вычисления в алгебре и теории чисел. М., 1976.
4. Супруненко Д. А. Группы матриц. М., 1972.


Поступила в редакцию 20.09.88.

*УДК 517.977*

*А. И. КАЛИНИН*

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМИ И ОСОБЫМИ УЧАСТКАМИ

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем модели существенно упрощаются, если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых в том, что при их применении исходные задачи сводятся к коррекции решения более простых задач оптимального управления. В рамках теории оптимальных процессов асимптотическим методам уделяется значительное внимание (см. обзорные статьи [1—3]). В большинстве работ рассматриваются задачи с открытой областью управления, т. е. задачи вариационного типа. Оптимальные режимы в них являются гладкими функциями малого параметра, что не имеет места для задач оптимального управления в классической постановке, асимптотика которых изучена недостаточно полно.

Опишем подход, который позволил разработать конструктивные алгоритмы асимптотического решения широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач оптимального управления с замкнутыми множествами допустимых значений управляющих воздействий. В основе подхода лежит идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений. В задачах с прямыми ограничениями на значения управляющих воздействий в виде замкнутых неравенств оптимальные управления в общем случае имеют релейные, квазиособые и особые участки [4]. Точки переключения, моменты начала и конца квазиособых и особых режимов вместе с множителями Лагранжа являются удобными конечномерными элементами для описания оптимальных управлений